UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Facultad de Ciencias

GEOMETRÍA LOCAL DE LOS CONJUNTOS ANALÍTICOS COMPLEJOS

(Local geometry of complex analytic sets)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Miguel Martínez Antón

Director: Nuria Corral Pérez

Junio - 2020

Resumen

Dada una función $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, podemos interesarnos por la naturaleza del conjunto definido por $f(z_1, z_2) = 0$. De forma más general, si $f_1, f_2, ..., f_s$ son funciones definidas en un abierto Ω del espacio complejo $\mathbb{C}^n$, podemos estudiar la estructura del conjunto de ceros $Z = \{z \in \Omega : f_i(z) = 0 \text{ para todo } i = 1, ..., s\}$. Si las funciones f_i se pueden escribir como una serie de potencias convergente (denominadas funciones holomorfas), entonces Z es un conjunto analítico global. En el caso en que las funciones f_i sean polinomios recuperamos la noción de conjunto algebraico.

El objetivo de este proyecto es introducir las variedades analíticas complejas con el fin de poder considerar funciones definidas sobre variedades y generalizar aquí la noción de conjunto analítico. Después, nos interesaremos en estudiar el comportamiento local de una función o conjunto analítico global en un entorno suficientemente pequeño de un punto dando lugar a la noción de germen de función o de conjunto. Para abordar el estudio de gérmenes necesitamos introducir los anillos locales de gérmenes de funciones y sus propiedades. Existen conjuntos que localmente tienen la estructura de conjunto analítico global pero para los cuales no existen funciones que los definan globalmente, estos son los denominados subconjuntos analíticos. Nos centraremos esencialmente en estudiar propiedades locales de este tipo de conjuntos como son la irreducibilidad, regularidad/singularidad o la dimensión.

Palabras clave: variedad analítica compleja, anillo local, germen, subconjunto analítico.

Abstract

Given a function $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, we can be interested in the nature of set defined by $f(z_1, z_2) = 0$. In a more general way, if $f_1, ..., f_s$ are functions defined in an open set Ω of complex space $\mathbb{C}^n$, we can study the structure of the set of zeros $Z = \{z \in \Omega : f_i(z) = 0 \text{ for every } i = 1, ..., s\}$. If we are able to write the functions f_i as a convergent power series (called holomorphic functions), then Z is an analytic global set. In the case of functions f_i are polynomials we get back the notion of algebraic set.

The goal of this project is to introduce the analytic complex manifolds in order to be able to consider functions defined on the manifolds and generalize in this context the notion of analytic set. After, we are interested in studying the local behavior of function or analytic global set at little enough neighborhood of a point giving rise to notion of function or set germ. We introduce the local ring of function germs because properties of germs of analytic sets can be described from the properties of this local ring. There exist sets that locally have the structure of a global analytic set although does not exist functions that define these sets globally. These sets are called analytic subsets. We focused on the local properties of these kind of sets such as irreducibility, regularity/singularity or dimension.

Key words: analytic complex manifold, local ring, germ, analytic subset.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Ronda el año 300 a.C. en Alejandría, ciudad de la Antigua Grecia, cuando Euclides revolucionó toda la geometría conocida hasta el momento. Discípulo de la escuela platónica, a la cual no podía acceder nadie que *ignorara la geometría*, comenzó a recopilar el trabajo de pensadores previos como Pitágoras o Eudoxo y fue en su obra magna *Los Elementos* en la que Euclides presenta, partiendo de una axiomática de cinco postulados, un estudio formal de las principales formas geométricas de interés de la época como fueron las rectas, los planos, las circunferencias, etc., que posteriormente suscitarían el estudio de toda una tradición de matemáticos a lo largo de la historia.

No es hasta el amanecer del siglo XVII cuando podemos hablar de geometría analítica. El matemático y filósofo francés René Descartes introduce por primera vez dicho término en su *Discurso del método*. Lo novedoso de esta incipiente manera de entender la geometría reside en la posibilidad de estudiar los lugares geométricos del plano a través del conjunto de ceros de funciones reales en dos variables reales. De esta manera, las rectas pasaron a identificarse con polinomios lineales y las circunferencias con polinomios de segundo grado. Gran parte del conocimiento geométrico de los pensadores clásicos había sido sintetizado en el estudio del anillo $\mathbb{R}[X,Y]$. Esta irrupción del álgebra en la geometría solo sería el preludio de lo que acontecería en los siglos XIX y XX con el álgebra moderna y la geometría algebraica. Por su parte y de forma independiente, otro matemático francés, Pierre de Fermat, conocía y empleaba ya estas nociones antes de que Descartes las formalizara. La generalización de esta geometría a dimensiones superiores se sucede de una manera natural y sirve como base instrumental e inspiración para la invención del cálculo infinitesimal por Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz de manera independiente. A partir de aquí, el análisis y la geometría se vuelven casi indistinguibles, hasta el punto que no puede discernirse entre los conceptos de curva y de función en una variable real. Fue Leonhard Euler el primero en intuir la diferencia y empezar a trabajar con superficies como las formadas por los ceros de funciones en tres variables reales.

Un siglo más tarde, el matemático noruego Caspar Wessel desarrolló la interpretación geométrica del cuerpo de los números complejos, identificando cada número complejo con un punto del plano real, y reformulando las operaciones elementales de la aritmética compleja en función de estos. Esta interpretación se ve completada unos años más tarde por el francés Jean-Robert Argand culminando en la creación del plano complejo, también llamado plano de Argand. Por su parte Carl Friedrich Gauss vuelve a unificar la geometría y el análisis con el desarrollo de la geometría diferencial. Se comienza a pensar en llevar la geometría a espacios distintos de $\mathbb{R}^n$, y se empieza a trabajar en espacios que más adelante se conocerán como variedades diferenciables. Nikolái Lobachevski y János Bolyai de forma independiente encuentran espacios donde no se cumplen los postulados de Euclides, dando paso a las geometrías no euclidianas.

Llega el siglo XIX y con él el desarrollo del análisis complejo, principalmente con los trabajos de Augustin Louis Cauchy, Bernhard Riemann y Karl Weierstrass. En este punto confluyen la geometría diferencial y el análisis complejo, y tiene lugar el nacimiento de la geometría analítica de espacios complejos. El objeto de interés son los lugares geométricos en espacios complejos estudiados como el conjunto de ceros de una o varias funciones holomorfas en una o varias variables complejas. Las propiedades de esta teoría resuelven problemas y abren campos de estudio respecto a todo el conocimiento que se tenía de geometría analítica real. Como dijo Jacques Hadamard: *el camino más corto entre dos verdades del análisis real pasa por el análisis complejo*. A finales del siglo XIX, principios del XX, con el auge del álgebra avanzada, comienza a desarrollarse la relación entre la geometría analítica y los anillos de funciones como se pone de manifiesto en conocidos resultados como el *Nullstellentsazt* de David Hilbert.

Comenzaremos este trabajo introduciendo el concepto de variedad analítica compleja; objeto que nos servirá de espacio ambiente para desarrollar la geometría sobre él. Una vez definidos los espacios sobre los que vamos a trabajar, veremos como trasladar la teoría de funciones de variable compleja a aplicaciones definidas sobre la variedad y, además, describiremos la topología inducida por la estructura de variedad analítica compleja. El capítulo dos termina con una sección dedicada a presentar el anillo de gérmenes de funciones holomorfas definidas sobre la variedad. Las propiedades algebraicas de este anillo nos aportarán una valiosa información para estudiar la geometría local de los subconjuntos analíticos de las variedades analíticas complejas.

En el capítulo tres definimos los conjuntos analíticos globales, aquellos dados por los ceros de funciones holomorfas definidas sobre toda la variedad, y estudiamos sus propiedades. Llamaremos subconjunto analítico a aquel conjunto que está definido localmente por los ceros de funciones analíticas. Haremos un estudio de los gérmenes de estos conjuntos estudiando la relación entre el anillo de gérmenes de funciones holomorfas y los gérmenes de conjuntos analíticos; esto nos permitirá conocer ciertas propiedades geométricas de los subconjuntos analíticos a partir de las propiedades algebraicas del anillo local y viceversa.

El último capítulo de la memoria está dedicado al estudio local de los subconjuntos analíticos. Probaremos que dos gérmenes de conjuntos analíticos son equivalentes (localmente biholomorfos) si los anillos locales (gérmenes de funciones definidos sobre los conjuntos) son isomorfos como $\mathbb{C}$-álgebras. Estudiaremos propiedades locales como la irreducibilidad, regularidad/singularidad o la dimensión.

Capítulo 2

Variedades analíticas complejas

2.1. Historia, definición y primeros ejemplos

La finalidad de este capítulo es introducir las variedades analíticas complejas, partiendo de un conjunto abstracto que no está inmerso en ningún otro espacio y sobre el que no hay definida ninguna topología. La idea de variedad surge de la necesidad de generalizar los conceptos de curvas y superficies. Son muchos los matemáticos como Gauss, Lobachevski o Bolyai, los que ya trabajaban la geometría sobre variedades antes siquiera de tener una definición formal de esta. En el siglo XIX, Riemann, en su tesis de habilitación, atisbó la necesidad de una definición intrínseca de estos objetos, aparte de desarrollar la teoría de métricas riemannianas considerada una de las mayores aportaciones en ciencia contemporánea. Hubo que esperar hasta 1913 para que Hermann Weyl diese por primera vez la definición formal de variedad con la que ahora trabajamos. Una vez vistas estas estructuras complejas, definiremos el anillo de gérmenes de funciones holomorfas así como las propiedades que estarán muy presentes a lo largo de todo el trabajo. Para este capítulo hemos seguido esencialmente las referencias [6] y [8].

Comenzaremos definiendo una serie de conceptos esenciales para poder llegar hasta el de variedad analítica compleja. Partiremos de un conjunto cualquiera M, sean $U \subseteq M$ un subconjunto y $\varphi : U \to \mathbb{C}^n$ una aplicación inyectiva con $\varphi(U)$ abierto de $\mathbb{C}^n$. Decimos que el par (U, φ) es una ***carta compleja*** sobre M y que U es el ***dominio de carta***. Dos cartas complejas (U, φ) y (V, ψ) sobre M, con $U \cap V \neq \emptyset$, son ***compatibles*** si se cumple que

- tanto $\varphi(U \cap V)$ como $\psi(U \cap V)$ son abiertos de $\mathbb{C}^n$,
- la función $\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U\cap V)} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ es un biholomorfismo.

A la función $\psi \circ \varphi^{-1}$ la llamamos ***cambio de cartas***. Una familia de cartas complejas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$ sobre M, cumpliendo que

- $M = \bigcup_{i \in I} U_i$,
- si $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ son dos cartas de $\mathcal{A}$ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces son compatibles.

se denomina ***atlas complejo*** sobre M. Dos atlas complejos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ sobre M son ***equivalentes*** si $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ es también un atlas complejo sobre M.

Lema 2.1.1. *Dado un atlas complejo $\mathcal{A}$ sobre M, existe un único atlas complejo maximal $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$ y definimos $\mathcal{A}^e$ como la familia de todas las cartas complejas sobre M compatibles con las de $\mathcal{A}$. Probaremos que es un atlas complejo sobre M. Podemos escribir

$$\mathcal{A}^e = \mathcal{A} \cup \{(V_j, \psi_j) \ : \ j \in J,\ (V_j, \psi_j) \text{ compatible con las cartas de } \mathcal{A}\}.$$

la familia formada por $\mathcal{A}$ y todas las cartas compatibles con las cartas de $\mathcal{A}$. De aquí se sigue que los dominios de carta cubren todo M,

$$\underbrace{\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)}_{M} \cup \left(\bigcup_{j\in J} V_j\right) = M.$$

Sean $(U, \varphi), (U', \varphi') \in \mathcal{A}^e$ con $U \cap V \neq \emptyset$. Distinguimos en casos:

- Si $(U, \varphi), (U', \varphi') \in \mathcal{A}$ entonces son compatibles.
- Si $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ y $(U', \varphi') \notin \mathcal{A}$ son compatibles por definición de $\mathcal{A}^e$.
- Si $(U, \varphi), (U', \varphi') \notin \mathcal{A}$, hay que probar la compatibilidad. Sea $z \in \varphi(U \cap U')$, existe (V, ψ) carta de $\mathcal{A}$ con $\varphi^{-1}(z) \in V$. Sabemos que $\varphi' \circ \psi^{-1}$ y $\psi \circ \varphi^{-1}$ son biholomorfismos en un entorno de z, entonces
$$\varphi' \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi^{-1} = \varphi' \circ \varphi^{-1}$$
es biholormorfismo en un entorno de z por ser composición de biholomorfismos. Así tenemos que el cambio de cartas es biholomorfismo local. Como las cartas son inyectivas el cambio de cartas también es inyectivo así que tenemos que $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ es un biholomorfismo global de $\varphi(U \cap U')$ en $\varphi'(U \cap U')$. Y por lo tanto $(U, \varphi), (U', \varphi')$ son compatibles.

Con lo hecho hasta ahora tenemos que $\mathcal{A}^e$ es un atlas sobre M. Supongamos ahora que existe $\mathcal{M}$ un atlas sobre M con $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$, como $\mathcal{M}$ contiene a $\mathcal{A}$, entonces todas las cartas de $\mathcal{M}$ son compatibles con las de $\mathcal{A}$ y por lo tanto todas esas cartas pertenecen a $\mathcal{A}^e$, luego $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}^e$ así que $\mathcal{A}^e$ es maximal. Por último supongamos que existe otro atlas maximal $\mathcal{M}$ que contiene a $\mathcal{A}$, como $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^e$ y $\mathcal{M}$ es maximal, entonces $\mathcal{A}^e \subset \mathcal{M}$. De donde se obtiene la igualdad.

□

Este lema no solo nos da la unicidad del atlas maximal, si no que nos dice como es dicho atlas. Ahora veremos una proposición que caracteriza a los atlas equivalentes.

Proposición 2.1.1. *Dos atlas son equivalentes si, y solo si, están contenidos en el mismo atlas maximal.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Sean $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ dos atlas equivalentes sobre M, entonces $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ es un atlas sobre M y por lo tanto todas las cartas de $\mathcal{A}'$ son compatibles con las de $\mathcal{A}$, así que $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}^e$. Como $\mathcal{A}'$ solo puede estar contenido en un maximal los dos atlas están contenidos en el mismo maximal.

$\Longleftarrow$) Sean $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ dos atlas sobre M contenidos en el mismo atlas maximal. Como cada uno es atlas, sus dominios de cartas cubren M, y evidentemente también la unión de los dominios de $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$. Por otro lado, como están contenidos en el mismo atlas, todas las cartas son compatibles entre sí. Así que $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ es un atlas sobre M y por ello $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son equivalentes.

□

Con esto es suficiente para definir el concepto de variedad analítica compleja.

Definición 2.1.1. *Sean M un conjunto y $\mathcal{A}$ un atlas complejo maximal sobre él. Llamamos* **variedad analítica compleja** *al par $(M, \mathcal{A})$.*

Llamamos **dimensión** *de la variedad $(M, \mathcal{A})$ al entero n, siendo $\mathbb{C}^n$ el espacio donde toman valores las cartas de $\mathcal{A}$. A cada elemento $\xi \in M$, le denominamos* **punto de la variedad**. *Axiomáticamente, si $M = \{\xi\}$ es un conjunto unipuntual y $\mathcal{A} = \{(\xi, f_z) : z \in \mathbb{C}\}$ donde $f_z(\xi) = z$, decimos que $(M, \mathcal{A})$ es una variedad analítica compleja de dimensión 0.*

Obsérvese que si dotamos a un conjunto M de un atlas complejo $\mathcal{A}$ cualquiera, su estructura como variedad analítica compleja queda unívocamente determinada por $(M, \mathcal{A}^e)$. Gracias a esto podemos trabajar directamente con $\mathcal{A}$ sin necesidad de calcular su maximal.

Daremos ahora una serie de ejemplos de variedades analíticas complejas que nos ayuden a comprender como son estas estructuras, esencialmente se trata de dotar al conjunto de una familia de aplicaciones que nos permitan identificar localmente el conjunto con abiertos de $\mathbb{C}^n$.

Ejemplo 2.1.1. *Tanto el* **espacio complejo** $\mathbb{C}^n$ *como cualquier abierto Ω de $\mathbb{C}^n$ con los atlas $\mathcal{A} = \{(\mathbb{C}^n, Id_{\mathbb{C}^n})\}$ y $\mathcal{A}' = \{(\Omega, Id_\Omega)\}$ respectivamente, tienen estructura de variedad analítica compleja de dimensión n.*

Ejemplo 2.1.2. *Sean $S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $Id : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y*

$$\begin{array}{rccc} f\colon & S \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & z & \longmapsto & \frac{1}{z} \\ & \infty & \longmapsto & 0. \end{array}$$

Tomamos el atlas $\mathcal{A} = \{(\mathbb{C}, Id), (S \setminus \{0\}, f)\}$ que dota a S de estructura de variedad analítica compleja de dimensión 1. A la variedad $(S, \mathcal{A})$ se la conoce como **Esfera de Riemann** *y es un ejemplo de superficie de Riemann.*

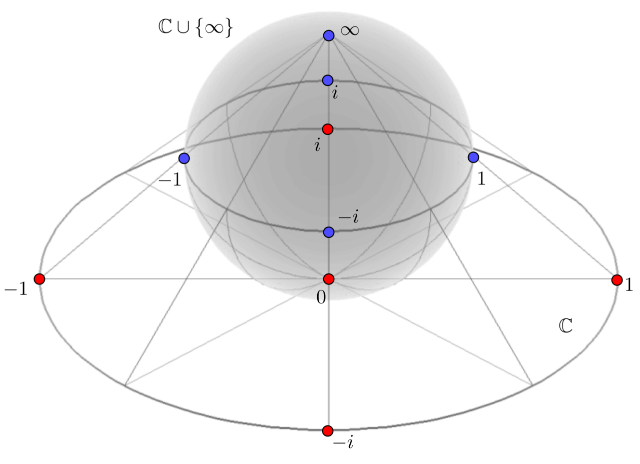

Figura 2.1: Esfera de Riemann. Figura modificada con GeoGebra a partir de [17].

Ejemplo 2.1.3. *Cualquier $\mathbb{C}$-espacio vectorial M de dimensión n es una variedad analítica compleja. Simplemente tenemos que emplear el hecho de que M es isomorfo a $\mathbb{C}^n$.*
Dada una base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ de M, todo $m \in M$ se escribe de forma única como $m = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ con $\lambda_i \in \mathbb{C}$ y $1 \leq i \leq n$. Se define la función $f_{\mathcal{B}}$,

$$\begin{array}{rccc} f_{\mathcal{B}}\colon & M & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n & \longmapsto & (\lambda_1, ..., \lambda_n) \end{array}$$

Esta función es un isomorfismo y por lo tanto, tomando el atlas $\mathcal{A} = \{(M, f_{\mathcal{B}})\}$, tenemos que $(M, \mathcal{A})$ es una variedad analítica compleja de dimensión n.

Ejemplo 2.1.4. *Definimos el* **espacio proyectivo complejo** *de dimensión n como el espacio cociente $\mathbb{C}^{n+1}/\sim$ donde $\sim$ es la relación de equivalencia dada por*

$$z \sim c \Longleftrightarrow \textit{existe } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \textit{ con } z = \lambda c$$

Tenemos entonces que $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} = \{[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] : (x_0, x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\}$, donde $[x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$ denota la clase de equivalencia de $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

Tomamos $U_i = \{[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] : x_i \neq 0\} = \left\{ \left[\frac{x_0}{x_i} : \cdots : \frac{x_{i-1}}{x_i} : 1 : \frac{x_{i+1}}{x_i} : \cdots : \frac{x_n}{x_i} \right] : x_i \neq 0 \right\}$ y para cada dominio definimos

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i\colon & U_i & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & [z_0 : \ldots z_{i-1} : 1 : z_{i+1} : \ldots z_n] & \longmapsto & (z_0, ..., z_{i-1}, z_{i+1}, ..., z_n) \end{array}$$

Por como está definido U_i, φ_i está bien definida y es biyectiva. Consecuentemente, $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) : 0 \leq i \leq n\}$ define un atlas complejo sobre $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.

Para saber si dicho atlas dota al espacio proyectivo complejo de estructura de variedad analítica compleja, hace falta ver la compatibilidad entre cartas.

Sean (U_i, φ_i) y (U_j, φ_j) con $i < j$, entonces

$$U_i \cap U_j = \{[x_0 : \cdots : x_i : \cdots : x_j : \cdots : x_n] : x_i, x_j \neq 0\},$$

$$\varphi_i(U_i \cap U_j) = \{(z_0, ..., z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n : z_{j-1} \neq 0\} \textit{ y } \varphi_j(U_i \cap U_j) = \{(z_0, ..., z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n : z_i \neq 0\}$$

ambos conjuntos abiertos en $\mathbb{C}^n$.

La aplicación de cambio de carta $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(U_i \cap U_j)} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ viene dada por:

$$\begin{aligned} (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(z_0, ..., z_{n-1}) &= \varphi_j(\varphi_i^{-1}(z_0, ..., z_{n-1})) \\ &= \varphi_j\left([z_0 : \cdots : z_{i-1} : 1 : z_i : \ldots z_{n-1}]\right) \\ &= \varphi_j\left(\left[\frac{z_0}{z_{j-1}} : \cdots : \frac{z_{i-1}}{z_{j-1}} : \frac{1}{z_{j-1}} : \frac{z_i}{z_{j-1}} : \cdots : \frac{z_{j-2}}{z_{j-1}} : 1 : \frac{z_j}{z_{j-1}} : \cdots : \frac{z_{n-1}}{z_{j-1}}\right]\right) \\ &= \left(\frac{z_0}{z_{j-1}}, ..., \frac{z_{i-1}}{z_{j-1}}, \frac{1}{z_{j-1}}, \frac{z_i}{z_{j-1}}, ..., \frac{z_{j-2}}{z_{j-1}}, \frac{z_j}{z_{j-1}}, ..., \frac{z_{n-1}}{z_{j-1}}\right) \end{aligned}$$

que es un biholomorfismo. Para ello necesitamos ver que es holomorfa y tiene inversa holomorfa. Cada una de sus componentes es el cociente de dos funciones holomorfas y el denominador no se anula ya que $z_{j-1} \neq 0$ para todo z en $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ así que $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(U_i \cap U_j)}$ es holomorfa en $\varphi_i(U_i \cap U_j)$. Por otro lado tenemos la aplicación $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}|_{\varphi_j(U_i \cap U_j)} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$ que viene dada por:

$$\begin{aligned}
(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(z_0, ..., z_{n-1}) &= \varphi_i(\varphi_j^{-1}(z_0, ..., z_{n-1})) \\
&= \varphi_i\left([z_0 : \cdots : z_{j-1} : 1 : z_j : \ldots z_{n-1}]\right) \\
&= \varphi_i\left(\left[\frac{z_0}{z_i} : \cdots : \frac{z_{i-1}}{z_i} : 1 : \frac{z_{i+1}}{z_i} : \cdots : \frac{z_{j-1}}{z_i} : \frac{1}{z_i} : \frac{z_j}{z_i} : \cdots : \frac{z_{n-1}}{z_i}\right]\right) \\
&= \left(\frac{z_0}{z_i}, ..., \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, ..., \frac{z_{j-1}}{z_i}, \frac{1}{z_i}, \frac{z_j}{z_i}, ..., \frac{z_{n-1}}{z_i}\right)
\end{aligned}$$

Análogamente a lo anterior, cada componente es cociente de funciones holomorfas y el denominador no se anula puesto que $z_i \neq 0$ para todo z en $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ así que $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}|_{\varphi_j(U_i \cap U_j)}$ es holomorfa en todo su dominio. Finalmente veamos que cada una es la inversa de la otra

$$\begin{aligned}
(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) \circ (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}) = \varphi_j \circ (\varphi_i^{-1} \circ \varphi_i) \circ \varphi_j^{-1} = \varphi_j \circ \varphi_j^{-1} = Id_{\varphi_j(U_i \cap U_j)} \\
(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}) \circ (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) = \varphi_i \circ (\varphi_j^{-1} \circ \varphi_j) \circ \varphi_i^{-1} = \varphi_i \circ \varphi_i^{-1} = Id_{\varphi_i(U_i \cap U_j)}.
\end{aligned}$$

Luego el cambio de carta es un biholomorfismo y en conclusión $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathcal{A})$ es una variedad analítica compleja de dimensión n.

Ejemplo 2.1.5. *El espacio $Gl(n, \mathbb{C})$ de todas las matrices cuadradas $n \times n$ con entradas complejas de determinante no nulo es una variedad analítica compleja de dimensión n^2. Consideremos el atlas $\mathcal{A} = \{(Gl(n, \mathbb{C}), \varphi)\}$ donde*

$$\begin{array}{cccc}
\varphi\colon & Gl(n, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n^2} \\
& \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} & \longmapsto & (a_{11}, ..., a_{1n}, ..., a_{n1}, ..., a_{nn})
\end{array}$$

Esta función es claramente inyectiva, falta ver que $\varphi(Gl(n, \mathbb{C}))$ es abierto de $\mathbb{C}^{n^2}$.
Como la carta que estamos dando no es más que una manera distinta de escribir las entradas de una matriz, podemos definir la función determinante sobre $\mathbb{C}^{n^2}$ de la siguiente manera

$$\begin{array}{cccc}
det\colon & \mathbb{C}^{n^2} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& (a_{11}, ..., a_{1n}, ..., a_{n1}, ..., a_{nn}) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} ind(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}
\end{array}$$

donde $\mathcal{S}_n$ es el grupo simétrico de n elementos e $ind : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ es la función índice que envía las permutaciones pares al 1 y las impares al -1.

De este modo tenemos una función cumpliendo que $det(A) = det(\varphi(A))$ para todo $A \in Gl(n, \mathbb{C})$, y por lo tanto $\varphi(Gl(n, \mathbb{C})) = det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Como $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ es un abierto de $\mathbb{R}$ y el determinante es una función continua, entonces $\varphi(Gl(n, \mathbb{C}))$ es un abierto de $\mathbb{C}^{n^2}$ como queríamos probar. De esta manera $(Gl(n, \mathbb{C}), \mathcal{A})$ es un ejemplo de variedad analítica compleja de dimensión n^2.

Vistos algunos ejemplos de variedades, veamos ahora una proposición muy útil que nos permite construir nuevas variedades a partir de otras.

Proposición 2.1.2. *Sean $(M, \mathcal{A})$ y $(N, \mathcal{A}')$ dos variedades analíticas complejas de dimensiones m y n respectivamente, entonces $M \times N$ es una variedad analítica compleja de dimensión $m+n$.*

Demostración. Tomamos $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ y $(V, \psi) \in \mathcal{A}'$, y definimos

$$\begin{array}{rccc} \phi_{\varphi,\psi}: & U \times V & \longrightarrow & \mathbb{C}^{m+n} \\ & (\xi, \omega) & \longmapsto & (\varphi(\xi), \psi(\omega)) \end{array}$$

Es claro que $\phi(U \times V) = \varphi(U) \times \psi(V)$ que es abierto de $\mathbb{C}^{m+n}$ por ser producto de un abierto de $\mathbb{C}^m$ por un abierto de $\mathbb{C}^n$. Además, como φ y ψ son inyectivas, ϕ también lo es. Por consiguiente $(U \times V, \phi_{\varphi,\psi})$ es un carta de $M \times N$. Definimos $\mathcal{C} = \{(U \times V, \phi_{\varphi,\psi}) \ : \ (U, \varphi) \in \mathcal{A}, (V, \psi) \in \mathcal{A}'\}$. Obviamente,

$$\bigcup_{(U \times V, \phi_{\varphi,\psi}) \in \mathcal{C}} U \times V = \underbrace{\left(\bigcup_{(U,\varphi) \in \mathcal{A}} U \right)}_{M} \times \underbrace{\left(\bigcup_{(V,\psi) \in \mathcal{A}'} V \right)}_{N} = M \times N.$$

Por otro lado, sean $(U_i \times V_k, \phi_{\varphi_i,\psi_k}), (U_j \times V_l, \phi_{\varphi_j,\psi_l}) \in \mathcal{C}$ con $(U_i \times V_k) \cap (U_j \times V_l) \neq \emptyset$, tenemos que

$$\phi_{\varphi_i,\psi_k}((U_i \times V_k) \cap (U_j \times V_l)) = \phi_{\varphi_i,\psi_k}((U_i \cap U_j) \times (V_k \cap V_l)) = \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \psi_k(V_k \cap V_l)$$

es abierto de $\mathbb{C}^{m+n}$ e igual para $\phi_{\varphi_j,\psi_l}((U_i \times V_k) \cap (U_j \times V_l))$. Por último, para $(z, w) \in \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \psi_k(V_k \cap V_l)$

$$\phi_{\varphi_j,\psi_l} \circ \phi^{-1}_{\varphi_i,\psi_k}|_{\varphi_i(U_i \cap U_j) \times \psi_k(V_k \cap V_l)}(z, w) = \phi_{\varphi_j,\psi_l}(\varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(U_i \cap U_j)}(z), \psi_k^{-1}|_{\psi_k(V_k \cap V_l)}(w))$$

$$= (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(U_i \cap U_j)}(z), \psi_l \circ \psi_k^{-1}|_{\psi_k(V_k \cap V_l)}(w))$$

es un biholomorfismo por ser cada componente biholomorfismo. Con esto se tiene que $\mathcal{C}$ es un atlas complejo sobre $M \times N$ y, por lo tanto $(M \times N, \mathcal{C})$ es una variedad analítica compleja de dimensión $m + n$.

□

Es natural preguntarse qué condiciones tiene que cumplir un subconjunto de una variedad analítica compleja para tener también estructura de variedad analítica compleja, de esta pregunta surge la noción de subvariedad analítica compleja.

Definición 2.1.2. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja de dimensión n y $N \subset M$ un subconjunto de la variedad. Se dice que N es una* **subvariedad analítica compleja** *de dimensión $k \leq n$ si para cada $\omega \in N$ existe una carta $(U_\omega, \varphi_\omega) \in \mathcal{A}$ tal que $\omega \in U_\omega$, $\varphi_\omega(\omega) = 0$ y $\varphi_\omega(N \cap U_\omega)$ sea un abierto de $\mathbb{C}^k \times \{0\}$.*

En la definición precedente si consideramos $U'_\omega = U_\omega \cap N$ y la aplicación $\varphi'_\omega = \varphi_\omega|_{U'_\omega} : U'_\omega \to \mathbb{C}^k \times \{0\} \simeq \mathbb{C}^k$ tenemos que el atlas $\mathcal{A}' = \{(U'_\omega, \varphi'_\omega) : \omega \in N\}$ dota al conjunto $N \subset M$ de su propia estructura de variedad analítica compleja. Se conoce a $(N, \mathcal{A}')$ como ***estructura analítica compleja inducida*** por M en N. En particular, cada punto de una variedad analítica compleja es una subvariedad de dimensión 0 de esta.

Ejemplo 2.1.6. *Sean $(\mathbb{C}^n, Id_{\mathbb{C}^n})$ el espacio complejo de dimensión n con su estructura natural de variedad analítica compleja y $\mathbb{C}^k$ con $k < n$, entonces $\mathbb{C}^k$ es una subvariedad analítica compleja de $\mathbb{C}^n$ de dimensión k. Sea $\xi = (\xi_1, ..., \xi_k, 0, ..., 0) \in \mathbb{C}^k$, considerando la carta $(\mathbb{C}^n, f_\xi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n)$ definida por $f_\xi(z) = z - \xi$, tenemos que $\xi \in \mathbb{C}^n$, $f_\xi(\xi) = 0$ y $f_\xi(\mathbb{C}^k \cap \mathbb{C}^n) = \mathbb{C}^k$. Así que $\mathbb{C}^k$ es subvariedad.*

2.2. Funciones y aplicaciones entre variedades analíticas complejas

Una vez conocida la noción de variedades analíticas complejas nos interesa ver cómo podemos relacionarlas con el cuerpo complejo o entre ellas mismas. Para ello hemos de establecer los morfismos de esta categoría de objetos matemáticos.

Definición 2.2.1. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja, $\xi \in M$ un punto de la variedad y $f : M \to \mathbb{C}$ una función. Se dice que f es* **holomorfa en** *ξ si existe $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ con $\xi \in U$ tal que $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ es holomorfa en $\varphi(\xi)$.*

Decimos que f es **holomorfa** *si lo es para todo punto de M. Además, decimos que f es un* **biholomorfismo** *si es holomorfa en M y tiene una inversa que también lo es.*

Nótese que si existe una carta del atlas que cumple las condiciones de la Definición 2.2.1, entonces cualquier carta cuyo dominio de carta contenga al punto ξ va a cumplirlas. Esto se debe a que los cambios de carta son biholomorfismos, lo que nos permite pasar de una a otra sin modificar sus propiedades. Podemos así extender el conocimiento que tenemos acerca del cálculo de funciones complejas de varias variables complejas a un conjunto en principio abstracto. En concreto, como la suma y el producto de funciones holomorfas en un punto es una función holomorfa, también se cumple para funciones complejas definidas sobre una variedad analítica compleja. Con estas operaciones podemos definir como

$$\mathcal{H}_\xi(M) = \{f : M \to \mathbb{C} \ : \ f \text{ holomorfa en } \xi\}$$

el anillo de funciones de M en $\mathbb{C}$ holomorfas en ξ con la suma y el producto naturales de funciones. Este anillo nos servirá de utilidad más adelante. Es evidente que la composición de funciones holomorfas también es holomorfa. Vamos a ver ahora un resultado importante para el desarrollo de esta teoría.

Proposición 2.2.1. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja, $N \subset M$ una subvariedad analítica compleja de M, $\xi \in N$ un punto de N y $f : M \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en ξ. Entonces, $f|_N : N \to \mathbb{C}$ es también una función holomorfa en ξ.*

Demostración. Sea $\xi \in N$, entonces existe $(U_\xi, \varphi_\xi) \in \mathcal{A}$ tal que $\xi \in U_\xi$ y $(U_\xi \cap N, \varphi_\xi|_{U_\xi \cap N}) \in \mathcal{A}'$. Como f es holomorfa en ξ entonces $f \circ \varphi_\xi^{-1}$ es holomorfa en $\varphi_\xi(\xi)$. Evidentemente, $(f|_N) \circ (\varphi_\xi|_{U_\xi \cap N})^{-1} = (f \circ \varphi_\xi^{-1})|_{U_\xi \cap N}$ que es holomorfa en $\varphi_\xi(\xi)$ por ser restricción de una función holomorfa.

□

Ahora que tenemos una definición de función holomorfa, podemos plantearnos cómo extenderla a aplicaciones entre dos variedades analíticas complejas cualesquiera.

Definición 2.2.2. *Sean $(M, \mathcal{A})$ y $(N, \mathcal{A}')$ dos variedades analíticas complejas, $\xi \in M$ un punto de la primera y $f : M \to N$ un aplicación entre ellas. Se dice que f es* **holomorfa en** ξ *si existen cartas $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ y $(V, \psi) \in \mathcal{A}'$ con $\xi \in U$ y $f(\xi) \in V$ tales que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ es holormofa en $\varphi(\xi)$.*

Decimos que f es **holomorfa** *si lo es para todo punto de M. Al igual que antes, decimos que f es un* **biholomorfismo** *si es holomorfa en M y tiene una inversa que también lo es.*

Vemos que esta definición generaliza a la de funciones con valores complejos, no hay más que tomar $\mathbb{C}$ con su estructura natural de variedad analítica compleja. Además, si consideramos $\mathbb{C}^n$ con su estructura natural de variedad analítica compleja, tomamos $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ una carta de M y vemos la aplicación $\varphi : U \to \varphi(U)$ como una aplicación entre variedades, tenemos que φ es un biholomorfismo. Basta con tomar la propia carta (U, φ) y componer $Id_{\varphi(U)} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = Id_{\varphi(U)}$ que es un biholomorfismo. De este modo las cartas de la variedad son un caso particular de biholomorfismos entre U y un abierto de $\mathbb{C}^n$. Ahora daremos una proposición bastante intuitiva acerca de la composición de funciones holomorfas.

Proposición 2.2.2. *Sean $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ y $(Z, \mathcal{C})$ tres variedades analíticas complejas, un punto $\xi \in M$, $f : M \to N$ y $g : N \to Z$ dos aplicaciones holomorfas en ξ y en $f(\xi)$ respectivamente, entonces su composición $(g \circ f) : M \to Z$ es una aplicación holomorfa en ξ.*

Demostración. Dado un punto $\xi \in M$, consideramos dos cartas $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ y $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ con $\xi \in U$ y $f(\xi) \in V$ tales que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es holomorfa en $\varphi(\xi)$. Por otro lado, tomamos una carta $(W, \phi) \in \mathcal{C}$ con $g(f(\xi)) \in W$ tal que $\phi \circ g \circ \psi^{-1}$ es holomorfa en $\psi(f(\xi))$. Podemos tomar en ambos casos la carta (V, ψ) porque no depende de la carta escogida. Como sabemos que la composición de funciones holomorfas en varias variables complejas es holomorfa, tenemos que $\phi \circ g \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \phi \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1}$ es holomorfa en $\varphi(\xi)$, por lo tanto $g \circ f$ es holomorfa en ξ.

□

2.3. Topología en las variedades analíticas complejas

El siguiente paso es saber cómo podemos definir una topología sobre una variedad analítica compleja cualquiera.

Lema 2.3.1. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja, $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ una cartal del atlas y $V \subset U$ tal que $\varphi(V)$ es un abierto de $\mathbb{C}^n$. Entonces el par $(V, \varphi|_V)$ es una carta de la variedad.*

Demostración. Hay que probar que $(V, \varphi|_V)$ es una carta y que siendo $(W, \psi) \in \mathcal{A}$ cualquiera, entonces $(V, \varphi|_V)$ y (W, ψ) son compatibles. Evidentemente $\varphi|_V$ es inyectiva por ser restricción de una inyectiva, y $\varphi|_V(V) = \varphi(V)$ es abierto por hipótesis, así que tenemos una carta compleja. Sea (W, ψ) con $W \cap V \neq \emptyset$,

$$\varphi|_V(W \cap V) = \varphi(W \cap (V \cap U)) \quad = \varphi((W \cap U) \cap V) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Por ser } \varphi \text{ inyectiva.}}}{=} \varphi(W \cap U) \cap \varphi(V)$$

abierto por ser intersección de dos abiertos. Sea $\psi \circ (\varphi|_{V \cap W})^{-1} : \varphi(V \cap W) \to \psi(V \cap W)$. En cada punto de $\varphi(V \cap W)$ la aplicación $\psi \circ (\varphi|_{V \cap W})^{-1}$ coincide con $\psi \circ \varphi^{-1}$ y por lo tanto es un biholomorfismo local. Como además $\psi \circ \varphi^{-1}$ es inyectiva, concluimos que es un biholomorfismo. $\square$

Sea $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja, con $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$. Consideramos $\mathcal{B} = \{U \subset M : (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}$ una familia de subconjuntos de M. Veamos que la familia $\mathcal{B}$ es una base para una topología sobre M. Tenemos que comprobar las dos condiciones para que $\mathcal{B}$ sea una base.

- Como $\mathcal{A}$ es atlas entonces $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ por lo que se cumple la primera propiedad.
- Sean $U_i, U_j \in \mathcal{B}$ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Como (U_i, φ_i) y (U_j, φ_j) son compatibles entonces $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ es abierto en $\mathbb{C}^n$, y por el Lema 2.3.1 el par $(U_i \cap U_j, \varphi_i|_{U_i \cap U_j})$ es una carta de la variedad y por lo tanto $U_i \cap U_j$ es un conjunto de $\mathcal{B}$.

En conclusión $\mathcal{B}$ nos define una topología sobre M definida como la ***topología inducida por su estructura de variedad analítica compleja***. Gracias a dotar a la variedad analítica compleja de esta topología tenemos directamente que las cartas son homeomorfismos y, por ello, cualquier aplicación holomorfa entre variedades analíticas complejas será también continua.

Podemos probar dos proposiciones que versan sobre la relación entre esta topología y las subvariedades de la variedad.

Proposición 2.3.1. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja y $N \subset M$ una subvariedad analítica compleja de M. Entonces la topología de N heredada de M coincide con la topología de $(N, \mathcal{A}')$ con la estructura de variedad inducida por M.*

Demostración. Solo hace falta probar que las bases de las dos topologías están cada una contenida en la otra. Sean τ la topología heredada en N y τ' la topología como variedad analítica compleja. Tomamos $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases para τ y τ' respectivamente.

$\subseteq$) Sea $B \in \mathcal{B}$ entonces $B = U \cap N$ con U abierto básico de M, es decir, existe una carta de $\mathcal{A}$ de la forma (U, φ). Sea $\omega \in B$, entonces existe una carta $(U_\omega, \varphi_\omega) \in \mathcal{A}$, tal que $(U_\omega \cap N, \varphi_\omega|_{U_\omega \cap N}) \in \mathcal{A}'$. Tomando ahora $W = U \cap U_\omega$, vemos que $\omega \in W \cap N \subset B$, solo hace falta ver que $W \cap N \in \tau'$. Notemos que $W \subset U_\omega$ es abierto de M, así que $(W, \varphi_\omega|_W) \in \mathcal{A}$. Por otro lado, como $W \cap N \subset U_\omega \cap N$, entonces $\varphi_\omega|_W(W \cap N) = \varphi_\omega(W \cap N) = \varphi_\omega(U_\omega \cap N) \cap \varphi_\omega(U_\omega \cap U)$ que es la intersección de un abierto de $\mathbb{C}^k \times \{0\}$ y un abierto de $\mathbb{C}^n$, así que es un abierto de $\mathbb{C}^k \times \{0\}$. Por lo que $(W \cap N, \varphi_\omega|_{W \cap N}) \in \mathcal{A}'$, luego $W \cap N \in \mathcal{B}'$ y por lo tanto es un abierto de τ', y por ende $B \in \tau'$.

$\supseteq$) Sea $B \in \mathcal{B}'$ entonces existe un carta en $\mathcal{A}'$ de la forma (B, ψ). Sea $\omega \in B$, existe $(U_\omega, \varphi_\omega) \in \mathcal{A}$ tal que $(U_\omega \cap N, \varphi_\omega|_{U_\omega \cap N}) \in \mathcal{A}'$. Definimos $W = (U_\omega \cap N) \cap B = U_\omega \cap B$, tenemos así que $\omega \in W \subset B$, solo falta ver que $W \in \tau$. Nótese que $W \subset U_\omega \cap N$ es abierto de N y $(U_\omega \cap N, \varphi_\omega|_{U_\omega \cap N})$ una carta de N, entonces $\tilde{W} = \varphi_\omega|_{U_\omega \cap N}(W)$ es un abierto de $\mathbb{C}^k \times \{0\}$ contenido en el abierto $\varphi_\omega(U_\omega \cap N)$. Sea $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ la proyección de las k primeras coordenadas, y consideramos

$$V = \{z \in \varphi_\omega(U_\omega) : \pi(z) \in \tilde{W}\} = \pi^{-1}(\tilde{W}) \cap \varphi_\omega(U_\omega)$$

que es un abierto de $\mathbb{C}^n$. Sea $\tilde{U}_\omega = \varphi_\omega^{-1}(V)$ que es un abierto de M contenido en U_ω y tomamos $\tilde{\varphi}_\omega = \varphi_\omega|_{\tilde{U}_\omega}$. Se tiene que $W = \tilde{U}_\omega \cap N$, luego $W \in \tau$, y en conclusión $B \in \tau$.

$\square$

El ejemplo más claro de subvariedad analítica compleja es el caso siguiente:

Ejemplo 2.3.1. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja de dimensión n y $N \subset M$ un subconjunto de la variedad. Si N es abierto, entonces N es subvariedad analítica compleja de dimensión n de M. Sea $w \in N$, tomamos una carta $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ con $w \in U$, entonces $w \in N \cap U \subset U$ es abierto por ser intersección de abiertos. En consecuencia, $\varphi(N \cap U)$ es abierto de $\mathbb{C}^n$ por ser φ homeomorfismo. Así que N es subvariedad analítica compleja de M.*

De hecho, los abiertos de M son las únicas subvariedades de dimensión n. Es evidente que si $N \subset M$ es una subvariedad de dimensión menor que n, entonces N es cerrado sobre M.

Las variedades recogen todas las propiedades topológicas locales de $\mathbb{C}^n$ como ser localmente conexas, verificar el *I axioma de numerabilidad* y ser T_1. Sin embargo, no tenemos garantizado que la variedad sea *Hausdorff*, verifique el *II axioma de numerabilidad* o sea conexa, como muestran los siguientes ejemplos:

Es obvio que la unión de dos abiertos de $\mathbb{C}^n$ disjuntos es una variedad analítica compleja que no es conexa. Pese a esto, dada $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja cualquiera, cada componente conexa va a ser abierta, y por lo tanto será una subvariedad de M. En particular, definimos una ***superficie de Riemann*** como cualquier variedad analítica compleja conexa de dimensión 1.

Ejemplo 2.3.2 (La recta compleja con dos orígenes). *Consideramos el conjunto $M = (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \{\alpha, \beta\}$ y el atlas $\mathcal{A} = \{(U, \varphi), (V, \psi)\}$ donde*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \{\alpha\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & z \\ & \alpha & \longmapsto & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \psi\colon & (\mathbb{C}\setminus\{0\})\cup\{\beta\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & z \\ & \beta & \longmapsto & 0. \end{array}$$

Nuestro atlas está bien definido porque tanto (U,φ) como (V,ψ) son cartas, $M = U\cup V$ y

$$\psi\circ\varphi^{-1} = Id_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}.$$

Tomamos una base de entornos de α de la forma $V_n^\alpha = (B(0,\frac{1}{n})\setminus\{0\})\cup\{\alpha\}$ y hacemos lo mismo con el punto β. Claramente no existen m,n tales que $V_m^\alpha\cap V_n^\beta = \emptyset$. Por lo tanto no podemos separar los puntos α y β. Entonces $(M,\mathcal{A})$ conocida como la **recta compleja con dos orígenes** *no es* Hausdorff.

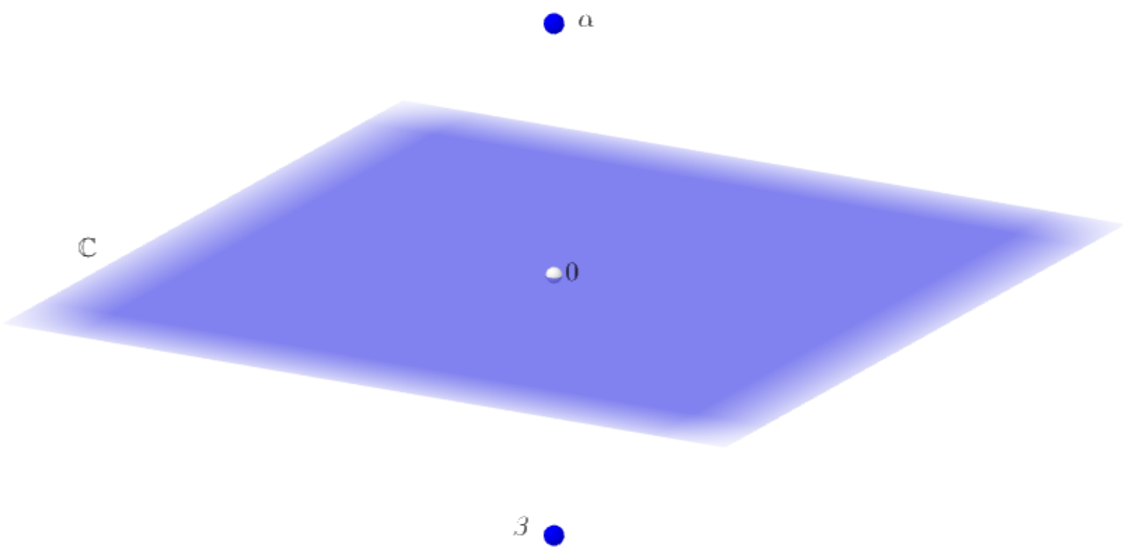

Figura 2.2: Recta compleja con dos orígenes realizada con GeoGebra.

Esta misma idea podemos utilizarla para la construcción de una variedad analítica compleja que no verifique el *II axioma de numerabilidad.*

Ejemplo 2.3.3 (**La recta compleja con cantidad no numerable de orígenes**). *Consideremos el plano complejo $\mathbb{C}^2$ y la relación de equivalencia dada por:*

$$(z,w)\sim(z',w') \iff z = z' \neq 0$$

Tomamos $M = \mathbb{C}^2/\sim$ y denotamos $[(z,w)]$ a la clase de $(z,w)\in\mathbb{C}^2$. Consideramos el atlas $\mathcal{A} = \{(U_\omega,\varphi_\omega) : \omega\in\mathbb{C}\}$ donde los conjuntos $U_\omega = \{[(z,w)] : z\neq 0\}\cup\{O_\omega\}$ con $O_\omega = (0,\omega)$ y las aplicaciones φ_ω están dadas por

$$\begin{array}{rccl} \varphi_\omega\colon & U_\omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & [z,w] & \longmapsto & z \\ & O_\omega & \longmapsto & 0 \end{array}$$

En este caso el atlas cumple que para todo $\omega \in \mathbb{C}$ *se tiene que* $O_\omega \in U_\alpha$ *si, y solo si,* $\omega = \alpha$*, es decir* O_ω *pertenece a un único dominio de cartas de atlas* $\mathcal{A}$*. Sea* $\mathcal{B}$ *una base para la topología sobre* M*, entonces como* U_ω *es abierto y* $O_\omega \in U_\omega$ *existe* $B_\omega \in \mathcal{B}$ *de forma que* $O_\omega \in B_\omega \subset U_\omega$*. Si tomamos ahora* U_α *con* $\alpha \neq \omega$*, entonces* $O_\omega \notin U_\alpha$ *y por lo tanto* $O_\omega \notin B_\alpha$*. Así que podemos construir una aplicación inyectiva*

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ & \omega & \longmapsto & B_\omega \end{array}$$

y en conclusión el cardinal de cualquier base es infinito no numerable así que $(M,\mathcal{A})$ *no verifica el* II axioma de numerabilidad.

Una vez tenemos vistos estos ejemplos, en lo sucesivo, todas las variedades analíticas complejas con las que trabajaremos serán *Hausdorff* y verificarán el *II axioma de numerabilidad.*

2.4. Anillo de gérmenes de funciones holomorfas

En esta sección trabajaremos con el anillo $(\mathcal{H}_\xi(M), +, \cdot)$ de las funciones holomorfas en ξ de M con valores complejos definido en la Sección 2.2. Primero veamos que dado un punto ξ de una variedad analítica compleja $(M,\mathcal{A})$ de dimensión n, y una carta (U,φ) con $\xi \in U$ podemos encontrar otra carta del atlas (U,ψ) en la que $\psi(\xi) = 0$. Utilizamos la función definida por:

$$\begin{array}{rccc} \tau\colon & \varphi(U) \subset \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & z & \longmapsto & z - \varphi(\xi) \end{array}$$

Observemos que τ es la traslación de vector $-\varphi(\xi)$ que es un biholomorfismo. Definimos $\psi = \tau \circ \varphi$. El par (U,ψ) es la carta del atlas que estábamos buscando. Gracias a ello siempre podremos suponer que para todo ξ existe una carta (U,φ) con $\varphi(\xi) = 0$. Por otro lado, sabemos que $f \in \mathcal{H}_\xi(M)$ quiere decir que $f \circ \varphi^{-1}$ es holomorfa en 0. Entonces $f \circ \varphi^{-1}(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k z^k$ en un entorno de 0 (donde utilizamos la notación introducida en la Sección A.2). Nótese que en el anillo $\mathcal{H}_\xi(M)$ las funciones no tienen porqué estar definidas en todo M, basta con que estén definidas en un entorno de ξ. Además, dadas dos funciones distintas del anillo, es posible que cerca del punto tomen los mismos valores, o lo que es lo mismo, tengan el mismo desarrollo en serie de potencias. Cuando estudiamos este anillo no nos interesa tanto al comportamiento global de las funciones como el local, y si dos funciones coinciden cerca del punto donde las estamos estudiando, nos interesa identificarlas. De aquí surge la idea de germen de funciones holomorfas.

Sea $(M,\mathcal{A})$ una variedad analítica compleja y $\xi \in M$. Definimos sobre $\mathcal{H}_\xi(M)$ la siguiente relación. Dados $f, g \in \mathcal{H}_\xi(M)$,

$$f \sim_\xi g \iff \text{existe } U \text{ entorno abierto de } \xi \text{ tal que } f|_U = g|_U.$$

Esta relación es de equivalencia:

1. <u>Reflexiva</u>. Sea $f \in \mathcal{H}_\xi(M)$ y $\xi \in M$, trivialmente $f(z) = f(z)$ para todo $z \in M$ por lo tanto $f \sim_\xi f$.

2. <u>Simétrica</u>. Sea $\xi \in M$ y sean $f, g \in \mathcal{H}_\xi(M)$ tal que $f \sim_\xi g$. Tiene que existir $U \subset M$ entorno abierto de ξ de forma que $f(z) = g(z)$ para todo $z \in U$. Así que obviamente $g \sim_\xi f$.

3. Transitiva. Sean $\xi \in M$ y $f, g, h \in \mathcal{H}_\xi(M)$ con $f \sim_\xi g$ y $g \sim_\xi h$. Esto es que existen $U, V \in M$ entornos abiertos de ξ, $f|_U = g|_U$ y $g|_V = h|_V$. Como $\xi \in U$ y $\xi \in V$, entonces $U \cap V \neq \emptyset$, y por lo tanto $U \cap V$ es un entorno abierto de ξ contenido en U y en V así que $f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V} = h|_{U\cap V}$. Con lo que concluimos que $f \sim_\xi h$.

A las clases de equivalencia generadas por $\sim_\xi$ se las denomina ***gérmenes de funciones holomorfas*** en ξ. Al germen definido por una función f, lo denotamos por $\mathbf{f}$. En particular si dos funciones $f, g \in \mathcal{H}_\xi(M)$ tienen el mismo germen entonces $f(\xi) = g(\xi)$. Por tanto el valor $f(\xi)$ no depende del representante escogido y se le denomina ***valor del germen***.

Podemos ahora dar la definición de anillo de gérmenes de funciones holomorfas.

Definición 2.4.1. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja, $\xi \in M$ un punto de la variedad y $\mathcal{H}_\xi(M)$ el anillo de funciones holomorfas en ξ. Denotaremos como $\mathcal{O}_\xi(M) = \mathcal{H}_\xi(M)/\sim_\xi$, al* **anillo de gérmenes de funciones holomorfas** *en ξ, donde la suma vendrá determinada de manera natural por $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} = \boldsymbol{h}_1$, donde $h_1 = f + g$ y el producto por $\boldsymbol{fg} = \boldsymbol{h}_2$, con $h_2 = fg$.*

El anillo $(\mathcal{O}_\xi(M), +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad en el que el germen de la función idénticamente 0 es el elemento neutro para la suma, y el germen de la función idénticamente 1 es el elemento neutro para el producto. Nos puede interesar en alguna ocasión utilizar una notación en la que quede clara la dimensión del espacio ambiente sobre el que trabajamos. En esos casos utilizaremos ${}_n\mathcal{O}_\xi(M)$ para denotar en anillo de gérmenes de funciónes holomorfas en $\xi \in M$, con M variedad analítica compleja de dimensión n.

Vamos a dar una definición equivalente puramente algebraica. Consideramos sobre $\mathcal{H}_\xi(M)$ el ideal $I_0 = \{f \in \mathcal{H}_\xi(M) : f = 0 \text{ en un entorno de } \xi\}$. Definimos $\mathcal{O}_\xi(M) = \mathcal{H}_\xi(M)/I_0$. Probemos que las dos definiciones son equivalentes. Sean $f, g \in \mathcal{H}_\xi(M)$ dos funciones holomorfas en ξ, solo hay que ver que $f \sim_\xi g$ si, y solo si, $f - g \in I_0$. Se tiene que $f \sim_\xi g$ si, y solo si, existe U entorno de ξ tal que $f|_U = g|_U$, es decir, tenemos que $(f - g)|_U = 0$ y esta condición es equivalente a que $f - g \in I_0$.

A parte de ser un anillo, el grupo $(\mathcal{O}_\xi(M), +)$ tiene estructura de $\mathbb{C}$-espacio vectorial si lo dotamos con el producto por escalares definido por

$$\begin{array}{rccc} \cdot_{\mathbb{C}}: & \mathbb{C} \times \mathcal{O}_\xi(M) & \longrightarrow & \mathcal{O}_\xi(M) \\ & (z, \mathbf{f}) & \longmapsto & \mathbf{zf} \end{array}$$

donde $\mathbf{zf}$ denota el germen de la función holomorfa zf. Por ello, juntando que $(\mathcal{O}_\xi, +, \cdot)$ es un anillo y que $(\mathcal{O}_\xi(M), +, \cdot_{\mathbb{C}})$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, tenemos que el conjunto $\mathcal{O}_\xi(M)$ tiene estructura de ***álgebra sobre los complejos*** o de $\mathbb{C}$-***álgebra***.

Una vez tenemos el anillo definido veamos algunas de sus principales propiedades.

Proposición 2.4.1. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja de dimensión n y $\xi \in M$ un punto de la variedad. Entonces el anillo $\mathcal{O}_\xi(M)$ es un* **dominio de integridad**.

Demostración. Hemos de probar que en $\mathcal{O}_\xi(M)$ no existen divisores del 0. Supongamos que esto no es cierto, es decir, que existen $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ distintos de $\mathbf{0}$, tales que $\mathbf{fg} = \mathbf{0}$. Entonces fg tiene el mismo germen que 0. Por lo tanto, existe un entorno U de ξ tal que $(fg)|_U = 0$. Eso quiere decir que para todo $z \in U$, tenemos $f(z)g(z) = 0$. Como $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$, tiene que existir al menos un $z_0 \in U$ con $f(z_0) \neq 0$, y por continuidad habrá un entorno V, con $z_0 \in V \subset U$ tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in V$. Pero entonces $g(z) = 0$ para todo $z \in V$, y como g es holomorfa, por el Teorema de Identidad (Teorema A.2.1), tenemos que $g(z) = 0$ para todo $z \in U$, definiendo así el mismo germen que 0. Lo que contradice nuestras hipótesis.

□

Como consecuencia directa de esta proposición el ideal I_0 es un ideal primo de $\mathcal{H}_\xi(M)$. Ahora probaremos un importante teorema que caracteriza el anillo ${}_n\mathcal{O}_\xi(M)$.

Teorema 2.4.1. *Sean $(M, \mathcal{A})$ un variedad analítica compleja de dimensión n y $\xi \in M$ un punto de la variedad. El anillo ${}_n\mathcal{O}_\xi(M)$ es isomorfo a $\mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$ que denota el anillo de series de potencias complejas convergentes centradas en el origen.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{H}_\xi(M)$ y consideremos una carta $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ con $\xi \in U$ y $\varphi(\xi) = 0$, tal que f esté definida en U y la aplicación $f \circ \varphi^{-1}$ tenga un desarrollo en serie de potencias del tipo $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}^n} a_k z^k = \sum\limits_{(k_1,...,k_n) \in \mathbb{N}^n} a_{(k_1,...,k_n)} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$ en $\varphi(U)$. Definimos el homomorfismo de anillos ϕ de la siguiente manera

$$\begin{array}{cccc} \phi\colon & \mathcal{H}_\xi(M) & \longrightarrow & \mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\} \\ & f & \longmapsto & \sum\limits_{k \in \mathbb{N}^n} a_k z^k \end{array}$$

donde $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}^n} a_k z^k$ es el desarrollo en serie de potencias de $f \circ \varphi^{-1}$ en un entorno de 0. Veamos que ϕ es sobreyectiva, sea $g = \sum\limits_{k \in \mathbb{N}^n} b_k z^k \in \mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$ y consideramos un entorno abierto V de 0 donde g está definida. Definimos $\tilde{U} = U \cap \varphi^{-1}(V)$ y consideramos

$$f = g \circ \varphi : \tilde{U} \to \mathbb{C}$$

Es claro que f es holomorfa en ξ porque $f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(\tilde{U})} = g$. Luego $f \in \mathcal{H}_\xi(M)$ y $\phi(f) = g$. Calculamos ahora el nucleo de ϕ,

$$\begin{aligned} ker(\phi) &= \left\{ f \in \mathcal{H}_\xi(M) : \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k z^k = 0 \right\} \\ &= \{ f \in \mathcal{H}_\xi(M) : f \circ \varphi^{-1} = 0 \text{ en un entorno de } \varphi(\xi) \} \\ &= \{ f \in \mathcal{H}_\xi(M) : f = 0 \text{ en un entorno de } \xi \} = I_0. \end{aligned}$$

Por el Primer Teorema de Isomorfía,

$${}_n\mathcal{O}_\xi(M) = \mathcal{H}_\xi(M)/I_0 \simeq \mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$$

□

Esto nos permite conocer propiedades de ${}_n\mathcal{O}_\xi(M)$ a través de las propiedades de $\mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$ como veremos en el siguiente corolario.

Corolario 2.4.1. *El anillo $\mathcal{O}_\xi(M)$ es un anillo* **local**.

Demostración. El conjunto $(\mathbb{C}\{z_1,...,z_n\})^*$ de unidades de $\mathbb{C}\{z_1,...,z_n\}$ es el conjunto $\left\{\sum_{k\in\mathbb{N}^n} a_k z^k \in \mathbb{C}\{z_1,...,z_n\} : a_0 \neq 0\right\}$, por lo tanto el conjunto

$$\mathfrak{m} = \mathbb{C}\{z_1,...,z_n\} \setminus (\mathbb{C}\{z_1,...,z_n\})^* = \left\{\sum_{k\in\mathbb{N}^n} a_k z^k \in \mathbb{C}\{z_1,...,z_n\} : a_0 = 0\right\}$$

es un ideal y, además el único ideal maximal. Por lo que $\mathbb{C}\{z_1,...,z_n\}$ es un anillo local. Por el teorema precedente podemos decir que el anillo $\mathcal{O}_\xi(M)$ también lo es.

□

Fijando una carta (U,φ) con $\xi \in U$ y $\varphi(\xi) = 0$, podemos escribir

$$\mathfrak{m}_\xi(M) = \{\mathbf{f} \in \mathcal{O}_\xi(M) : f \circ \varphi^{-1}(0) = 0\} = \{\mathbf{f} \in \mathcal{O}_\xi(M) : f(\xi) = 0\}$$

Luego teniendo en cuenta la identificación dada por el Teorema 2.4.1, podemos identificar $\mathfrak{m}_\xi(M)$ con $\left\{\sum_{k\in\mathbb{N}^n} a_k z^k \in \mathbb{C}\{z_1,...,z_n\} : a_0 = 0\right\}$. Se puede describir este ideal como el ***ideal de gérmenes de funciones holomorfas en*** ξ ***de valor*** 0. Consideremos el epimorfismo

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathcal{O}_\xi(M) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \mathbf{f} & \longmapsto & f(\xi). \end{array}$$

Trivialmente, $ker(\Phi) = \mathfrak{m}_\xi(M)$, así que el cuerpo $\mathcal{O}_\xi(M)/\mathfrak{m}_\xi(M) \simeq \mathbb{C}$. Es decir, el cuerpo residual de $\mathcal{O}_\xi(M)$ es isomorfo a $\mathbb{C}$.

Los siguientes teoremas proporcionan propiedades fundamentales para el estudio de la geometría de los conjuntos analíticos que veremos más adelante. En las demostraciones de estos resultados usaremos la definición de función regular, los Teoremas de Preparación y División de Weierstrass y otros resultados que pueden consultarse en el Apéndice A.

Teorema 2.4.2. *Sean $(M,\mathcal{A})$ una variedad analítica compleja de dimensión n y $\xi \in M$ un punto de la variedad. Entonces el anillo ${}_n\mathcal{O}_\xi(M)$ es un* **dominio de factorización única**.

Demostración. Hemos de demostrar que cualquier elemento no unidad del anillo puede descomponerse de manera única, salvo el orden de los factores, como producto de unidades y factores irreducibles. Vamos a probarlo por inducción sobre la dimensión. Como sabemos que ${}_n\mathcal{O}_\xi(M)$ es isomorfo a $\mathbb{C}\{z_1,...,z_n\}$ podemos generalizar el concepto y llamar ${}_0\mathcal{O}_\xi(M) = \mathbb{C}$. Para $n = 0$, tenemos que ${}_0\mathcal{O}_\xi(M)$ es un cuerpo y por lo tanto un DFU. Supongámoslo cierto para $n-1$, es decir, ${}_{n-1}\mathcal{O}_\xi(M)$ es un DFU. Tomemos $\mathbf{f} \in {}_n\mathcal{O}_\xi(M)$, por el Lema A.2.1 podemos suponerlo regular en z_n (Definición A.2.2), así que por el Teorema de Preparación de Weierstrass (Teorema A.2.5), $\mathbf{f} = \mathbf{ug}$ donde $\mathbf{u}$ es una unidad y $\mathbf{g}$ es un polinomio de Weierstrass (Definición A.2.3), así que $\mathbf{g} \in {}_{n-1}\mathcal{O}_\xi(M)[z_n]$. Por el Lema de Gauss (Lema A.1.1), ${}_{n-1}\mathcal{O}_\xi(M)[z_n]$ es DFU, por ser anillo de polinomios de un DFU. Así que $\mathbf{g} = \mathbf{u}_1\mathbf{g}_1\cdots\mathbf{g}_k$ donde $\mathbf{u}_1$ es una unidad y $\mathbf{g}_i$ es irreducible de ${}_{n-1}\mathcal{O}_\xi(M)[z_n]$. Entonces, $\mathbf{f} = \mathbf{u}_2\mathbf{g}_1\cdots\mathbf{g}_k$, donde $\mathbf{u}_2$ es una unidad. Como $\mathbf{f}$ es regular en z_n, cada $\mathbf{g}_i$ es regular en z_n, luego por el Teorema de Preparación de Weierstrass,

$\mathbf{g}_i = \mathbf{v}_i\mathbf{h}_i$ donde $\mathbf{v}_i$ es una unidad y $\mathbf{h}_i$ es un polinomio de Weierstrass. Así que, $\mathbf{g} = \mathbf{w}\mathbf{h}_1 \cdots \mathbf{h}_k$ con $\mathbf{w}$ una unidad en ${}_n\mathcal{O}_\xi(M)$, por la Observación A.2.1, $\mathbf{g} = \mathbf{h}_1 \cdots \mathbf{h}_k$, ya que el producto de polinomios de Weierstrass es un polinomio de Weierstrass. Imaginemos que $\mathbf{h}_1$ no es irreducible en ${}_n\mathcal{O}_\xi(M)$, entonces $\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_1'\mathbf{h}_1''$, con $\mathbf{h}_1', \mathbf{h}_1'' \in {}_n\mathcal{O}_\xi(M)$, no unidades. Como $\mathbf{h}_1$ es regular en z_n, entonces $\mathbf{h}_1', \mathbf{h}_1''$ también lo son. Aplicando el Teorema de Preparación de Weierstrass, $\mathbf{h}_1' = \mathbf{u}'\mathbf{t}'$ y $\mathbf{h}_1'' = \mathbf{u}''\mathbf{t}''$, con $\mathbf{u}', \mathbf{u}''$ unidades y $\mathbf{t}', \mathbf{t}''$ polinomios de Weierstrass. Entonces, $\mathbf{h}_1 = \mathbf{u}'\mathbf{u}''\mathbf{t}'\mathbf{t}''$, por la unicidad del Teorema de Preparación de Weierstrass, $\mathbf{h}_1 = \mathbf{t}'\mathbf{t}''$. Por lo tanto $\mathbf{g} = \mathbf{w}\mathbf{t}'\mathbf{t}''\mathbf{h}_2 \cdots \mathbf{h}_k$ una vez más por la Observación A.2.1, $\mathbf{g} = \mathbf{t}'\mathbf{t}''\mathbf{h}_2 \cdots \mathbf{h}_k$ donde todos los factores son no unidades. Esta descomposición tiene un factor irreducible más que la dada anteriormente, esto contradice que ${}_{n-1}\mathcal{O}_\xi(M)[z_n]$ sea DFU, por tanto no puede ser. Así que cada $\mathbf{h}_i$ es irreducible en ${}_n\mathcal{O}_\xi(M)$. Tenemos por consiguiente, $\mathbf{f} = \mathbf{u}\mathbf{h}_1 \cdots \mathbf{h}_k$, y así probamos la existencia de factorización.

Para probar la unicidad supongamos que existen dos descomposiciones $\mathbf{f} = \mathbf{h}_1 \cdots \mathbf{h}_s = \mathbf{g}_1 \cdots \mathbf{g}_r$ donde $\mathbf{h}_i, \mathbf{g}_j$ son irreducibles ${}_n\mathcal{O}_\xi(M)$. Una vez más, podemos suponerlos regulares en z_n, luego $\mathbf{h}_i = \mathbf{u}_i\mathbf{h}_i'$ y $\mathbf{g}_j = \mathbf{v}_j\mathbf{g}_j'$, donde $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j$ son unidades, y $\mathbf{h}_i', \mathbf{g}_j'$ son polinomios de Weierstrass. Por el Teorema A.2.4 son todos irreducibles en ${}_{n-1}\mathcal{O}_\xi(M)[z_n]$. Sustituyendo, $\mathbf{f} = \mathbf{h}_1' \cdots \mathbf{h}_s' = \mathbf{w}'\mathbf{g}_1' \cdots \mathbf{g}_r'$ donde $\mathbf{w}'$ es una unidad, como $\mathbf{h}_1' \cdots \mathbf{h}_s'$ y $\mathbf{g}_1' \cdots \mathbf{g}_r'$ son polinomios de Weierstrass, por la Observación A.2.1, $\mathbf{h}_1' \cdots \mathbf{h}_s' = \mathbf{g}_1' \cdots \mathbf{g}_r'$, aplicando la unicidad de descomposición en factores irreducibles de ${}_{n-1}\mathcal{O}_\xi(M)[z_n]$, las dos descomposiciones son iguales salvo el orden de los factores.

□

Teorema 2.4.3. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja de dimensión n y $\xi \in M$ un punto de la variedad. Entonces el anillo ${}_n\mathcal{O}_\xi(M)$ es* **noetheriano**.

Demostración. Vamos a probar que todo ideal de ${}_n\mathcal{O}_\xi(M)$ es finitamente generado y lo probaremos por inducción sobre la dimensión n. Recordemos que en la demostración del Teorema 2.4.2 generalizamos el concepto de ${}_n\mathcal{O}_\xi(M)$ a dimensión cero, ${}_0\mathcal{O}_\xi(M) = \mathbb{C}$, luego para $n = 0$ tenemos que ${}_0\mathcal{O}_\xi(M)$ es un cuerpo y por lo tanto noetheriano. Supongamos que ${}_{n-1}\mathcal{O}_\xi(M)$ es noetheriano y consideramos un ideal no trivial I de ${}_n\mathcal{O}_\xi(M)$. Sea un elemento $\mathbf{f} \in I$, por le Lema A.2.1 podemos suponer que es regular en la variable z_n. Utilizando el Teorema de Preparación de Weierstrass (Teorema A.2.5), podemos suponer $\mathbf{f} \in {}_{n-1}\mathcal{O}_\xi(M)[z_n]$. Así que $\mathbf{f} \in {}_{n-1}\mathcal{O}_\xi(M)[z_n] \cap I$ que es un ideal de ${}_{n-1}\mathcal{O}_\xi(M)[z_n]$. Por el Teorema de la Base de Hilbert (Teorema A.1.1), como ${}_{n-1}\mathcal{O}_\xi(M)$ es noetheriano entonces ${}_{n-1}\mathcal{O}_\xi(M)[z_n]$ es noetheriano. En consecuencia existen $\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_r$ generadores de ${}_{n-1}\mathcal{O}_\xi(M)[z_n] \cap I$. Para cualquier $\mathbf{g} \in I$, se sigue del Teorema de División de Weierstrass (Teorema A.2.6) que $\mathbf{g} = \mathbf{f}\mathbf{h} + \mathbf{r}$ con $\mathbf{h} \in {}_n\mathcal{O}_\xi(M)$ y $\mathbf{r} \in {}_{n-1}\mathcal{O}_\xi(M)[z_n]$. Pero $\mathbf{r} = \mathbf{g} - \mathbf{f}\mathbf{h}$, entonces $\mathbf{r} \in I$. Con ello $\mathbf{r} \in {}_{n-1}\mathcal{O}_\xi(M)[z_n] \cap I$, así que $\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{h}_i\mathbf{f}_i$ con $\mathbf{h}_i \in {}_{n-1}\mathcal{O}_\xi(M)[z_n]$. Sustituyendo, $\mathbf{g} = \mathbf{f}\mathbf{h} + \sum_{i=1}^{r} \mathbf{h}_i\mathbf{f}_i$ con $\mathbf{h}_i \in {}_{n-1}\mathcal{O}_\xi(M)[z_n]$. En conclusión $I = (\mathbf{f}, \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_r)$, por lo que I es finitamente generado y el anillo ${}_n\mathcal{O}_\xi(M)$ es noetheriano.

□

Capítulo 3

Gérmenes de conjuntos analíticos

En este capítulo veremos qué es un subconjunto analítico de una variedad analítica compleja, definiremos la noción de germen de conjunto y la aplicaremos directamente sobre los subconjuntos analíticos. Relacionaremos estos gérmenes con el anillo de gérmenes de funciones holomorfas visto en la Sección 2.4 y por último, introduciremos un importante concepto a la hora de estudiar la geometría local de los subconjuntos analíticos como es la irreducibilidad en un punto. Para este capítulo hemos seguido esencialmente las referencias [3], [8] y [12].

3.1. Conjuntos analíticos globales

Definición 3.1.1. *Sea $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja. Un* **conjunto analítico global** *de M, es cualquier conjunto de la forma*

$$V_M(f_1, ..., f_k) = \{z \in M : f_i(z) = 0, \ i = 1, .., k\}$$

donde $f_1, ..., f_k : M \to \mathbb{C}$ son funciones holomorfas.

En el caso en el que el conjunto analítico global $V_M(f)$ queda definido por una única función se dice que es un conjunto analítico ***principal***.

Veamos una serie de ejemplos de estos conjuntos.

Ejemplo 3.1.1. *Consideremos M un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión n, que ya hemos visto previamente que es una variedad analítica compleja. Todo subespacio vectorial de M es un conjunto analítico del mismo. Fijamos $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de M, y podemos identificar cada vector u del espacio vectorial con sus coordenadas $(x_1, ..., x_n)$ respecto de la base $\mathcal{B}$. De este modo identificamos M con $\mathbb{C}^n$ como vimos en el Ejemplo 2.1.3.*

Sea U un subespacio vectorial de M, entonces el conjunto U viene determinado por las soluciones de sus ecuaciones implícitas respecto de la base $\mathcal{B}$. Dichas ecuaciones son de la forma

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{d1}x_1 + \cdots + a_{dn}x_n = 0 \end{array}\right. \qquad \textit{con } a_{ij} \in \mathbb{C}$$

Si llamamos $f_i(x_1, ..., x_n) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$, con $1 \leq i \leq d$, evidentemente son funciones holomorfas porque son polinomios, y U no es más que $V_M(f_1, ..., f_d)$.

Un conjunto analítico de esta forma es un ejemplo de conjunto algebraico de M.

Los conjuntos algebraicos no son solo los que están definidos por funciones lineales sino por polinomios en general. Podemos definir ***conjunto algebraico*** como un conjunto analítico global $V_M(f_1, ..., f_n)$ en el que $f_1, ..., f_n$ son polinomios.

3.1.1. Propiedades de los conjuntos analíticos globales

Primeramente, respecto a la topología del conjunto es claro que es cerrado en M, esto se deduce directamente del hecho que las funciones holomorfas son continuas. Por otro lado tenemos que si M es conexo, entonces cualquier conjunto analítico propio tiene interior vacío. Esto es así, porque toda función holomorfa en M que se anula en todo un abierto de M, será idénticamente nula y por lo tanto el conjunto analítico que genera es el total. Ahora daremos algunas propiedades que nos permiten conocer mejor estos conjuntos.

Proposición 3.1.1. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja, $V_M(f_1, ..., f_s)$ y $V_M(g_1, ..., g_r)$ dos conjuntos analíticos globales de M, entonces tanto $V_M(f_1, ..., f_s) \cup V_M(g_1, ..., g_r)$ como $V_M(f_1, ..., f_s) \cap V_M(g_1, ..., g_r)$ son también conjuntos analíticos globales.*

Demostración. Vamos a probar que

$$V_M(f_1, ..., f_s) \cup V_M(g_1, ..., g_r) = V_M(f_i g_j : 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r).$$

$\subseteq$) Sea $z \in V_M(f_1, ..., f_s) \cup V_M(g_1, ..., g_r)$, por tanto $f_i(z) = 0$ para todo i, o $g_j(z) = 0$ para todo j. Supongamos por ejemplo que estamos en el primer caso, tomamos una función cualquiera $f_i g_j$ y veamos que se anula en z. Tenemos que $f_i g_j(z) = f_i(z) g_j(z) = 0$ porque $f_i(z) = 0$. De forma similar se razona si $z \in V_M(g_1, \ldots, g_r)$.

$\supseteq$) Vamos a suponer que no se da este contenido, es decir, que existe un z tal que $z \in V_M(f_i g_j : 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r)$, pero $z \notin V_M(f_1, ..., f_s) \cup V_M(g_1, ..., g_r)$. Esto es que existe i_0 con $f_{i_0}(z) \neq 0$ y también existe j_0 con $g_{j_0}(z) \neq 0$, por lo tanto $f_{i_0} g_{j_0}(z) = f_{i_0}(z) g_{j_0}(z) \neq 0$ y entonces $z \notin V_M(f_i g_j : 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r)$ llegando así a la contradicción. Tenemos así el otro contenido que nos da la igualdad.

Vamos a probar ahora que $V_M(f_1, ..., f_s) \cap V_M(g_1, ..., g_r) = V_M(f_1, ..., f_s, g_1, ..., g_r)$.

$\supseteq$) Sea $z \in V_M(f_1, ..., f_s, g_1, ..., g_r)$, entonces $f_i(z) = 0, g_j(z) = 0$ para todo $1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r$, trivialmente $z \in V_M(f_1, ..., f_s)$ y $z \in V_M(g_1, ..., g_r)$, así que $z \in V_M(f_1, ..., f_s) \cap V_M(g_1, ..., g_r)$.

$\subseteq$) Sea $z \in V_M(f_1, ..., f_s) \cap V_M(g_1, ..., g_r)$, esto es que $f_i(z) = 0$, con $1 \leq i \leq s$ y $g_j(z) = 0$ con $1 \leq j \leq r$. En suma $z \in V_M(f_1, ..., f_s, g_1, ..., g_r)$.

Con los dos contenidos tenemos la igualdad.

□

Usando inducción podemos probar el siguiente corolario,

Corolario 3.1.1. *Sea* $\{Z_k : 1 \leq k \leq N\}$ *una familia finita de conjuntos analíticos globales, entonces* $\bigcap_{k=1}^{N} Z_k$ *y* $\bigcup_{k=1}^{N} Z_k$ *son conjuntos analíticos globales.*

Proposición 3.1.2. *Sean* $(M, \mathcal{A})$ *y* $(N, \mathcal{A}')$ *dos variedades analíticas complejas y* $V_M(f_1, ..., f_s)$, $V_N(g_1, ..., g_r)$ *conjuntos analíticos globales de* M *y* N *respectivamente. Entonces* $V_M(f_1, ..., f_s) \times V_N(g_1, ..., g_r)$ *es un conjunto analítico de* $M \times N$.

Demostración. Veamos que

$$V_M(f_1, ..., f_s) \times V_N(g_1, ..., g_r) = V_{M\times N}(|f_i| \times |g_j| : 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r)$$

donde

$$\begin{array}{rccc} |f_i| \times |g_j|: & M \times N & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (m,n) & \longmapsto & |f_i(m)| + |g_j(n)| \end{array}$$

$\subseteq$) Sea $(z, w) \in V_M(f_1, ..., f_s) \times V_N(g_1, ..., g_r)$, entonces $f_i(z) = 0$ para todo $1 \leq i \leq s$ y $g_j(w) = 0$ para todo $1 \leq j \leq r$. Tomamos una función cualquiera del tipo $|f_i| \times |g_j|$. Tenemos $|f_i| \times |g_j|(z, w) = |f_i(z)| + |g_j(w)| = 0$. Finalmente, $(z, w) \in V_{M\times N}(|f_i| \times |g_j| : 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r)$. Con lo que tenemos el contenido.

$\supseteq$) Sea $(z, w) \in V_{M\times N}(|f_i| \times |g_j| : 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r)$, esto es que $|f_i| \times |g_j|(z, w) = |f_i(z)| + |g_j(w)| = 0$ con $1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r$ y supongamos que $(z, w) \notin V_M(f_1, ..., f_s) \times V_N(g_1, ..., g_r)$. Por ende, o existe i_0 tal que $f_{i_0}(z) \neq 0$ o existe j_0 tal que $g_{j_0}(w) \neq 0$. En el primer caso $|f_{i_0}| \times |g_j|(z, w) = |f_{i_0}(z)| + |g_j(w)| \neq 0$ para cualquier valor de j. En el segundo caso, $|f_i| \times |g_{j_0}|(z, w) = |f_i(z)| + |g_{j_0}(w)| \neq 0$ para cualquier valor de i.

En cualquier caso $(z, w) \notin V_{M\times N}(|f_i| \times |g_j| : 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r)$. Encontrando aquí la contradicción. De esta manera tenemos la igualdad entre conjuntos como queríamos probar.

□

Proposición 3.1.3. *Sean* $(M, \mathcal{A})$ *y* $(N, \mathcal{A}')$ *dos variedades analíticas complejas,* $Z = V_N(g_1, ..., g_r)$ *un conjunto analítico global de* N *y* $f : M \to N$ *una aplicación holomorfa. En estas condiciones,* $f^{-1}(Z)$ *es un subconjunto analítico global de* M.

Demostración. El conjunto $f^{-1}(Z)$ está dado por $f^{-1}(Z) = \{z \in M : f(z) \in Z\} = \{z \in M : g_i(f(z)) = 0, 1 \leq i \leq r\}$. Definimos $h_i = g_i \circ f : M \to \mathbb{C}$, que es una función holomorfa en M. De esta manera tenemos que, $f^{-1}(Z) = \{z \in M : h_i(z) = 0, 1 \leq i \leq r\} = V_M(h_1, ..., h_r)$. Es decir, $f^{-1}(Z)$ es un subconjunto analítico global de M.

□

Un tipo de aplicaciones holomorfas que se utilizan con frecuencia son las restricciones a espacios de dimensión más pequeña. Tomando $M = \mathbb{C}^2$ y $N = \mathbb{C}^3$ y la aplicación $f : M \to N$ dada por $f(z_1, z_2) = (z_1, z_2, 0)$. Si consideramos el conjunto $Z = V_N(z_1^2 + z_2^2 - z_3^2)$, entonces $f^{-1}(Z) = V_M(z_1^2 + z_2^2) = V_M(z_1 + iz_2, z_1 - iz_2)$. Este ejemplo ratifica la proposición anterior, pero pone de manifiesto que propiedades como la de ser *irreducible* que veremos más adelante no se conservan por imágenes inversas. Ahora nos preguntamos que sucede si por un lado tenemos definido un conjunto analítico sobre una variedad y por otro lado tenemos una subvariedad de esta, que ocurre con el conjunto de puntos donde estos dos objetos coinciden.

Proposición 3.1.4. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja, N una subvariedad analítica compleja de M y $Z = V_M(f_1, ..., f_s)$ un subconjunto analítico global de M. Entonces $N \cap Z$ es un subconjunto analítico global de N.*

Demostración. La intersección de N y Z está dada por $N \cap Z = \{z \in N : f_i(z) = 0, 1 \leq i \leq s\}$. Tomando $h_i = f_i|_N : N \to \mathbb{C}$, que son holomorfas por la Proposición 2.2.1, tenemos que $N \cap Z = \{z \in N : f_i(z) = 0, 1 \leq i \leq s\} = \{z \in N : h_i(z) = 0, 1 \leq i \leq s\} = V_N(h_1, ..., h_s)$. Definiendo así un subconjunto analítico global sobre N.

□

3.2. Subconjuntos analíticos

Desde esta sección en adelante nos vamos a centrar en estudiar la geometría analítica compleja desde un punto de vista local, es decir, los ceros de las funciones holomorfas en un entorno lo *suficientemente pequeño* de un punto. Vamos a ilustrar la motivación de este hecho para ver donde radica el interés en observar los lugares geométricos cerca de un punto. Consideremos como espacio ambiente $M = \mathbb{C}^2$ y en él el conjunto analítico global $Z = V_{\mathbb{C}^2}(z_2^2 - z_1^2(z_1 + 1))$.

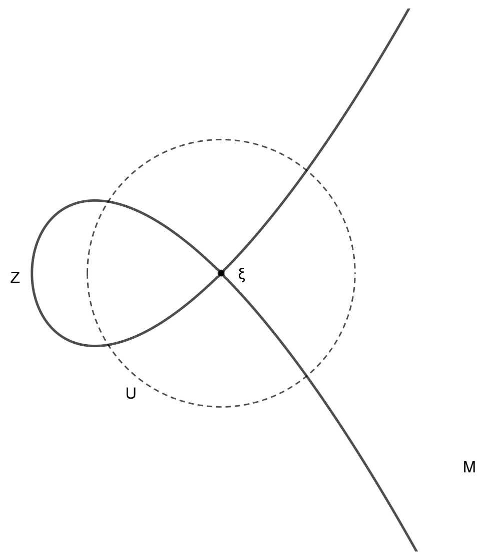

Figura 3.1: Representación en $\mathbb{R}^2$ del conjunto Z realizada con GeoGebra.

En el entorno U de $\xi = (0, 0)$ podemos apreciar dos *ramas*, o componentes de Z lo que nos da la idea intuitiva de que este punto es *singular*. Es natural preguntarse cómo de pequeño tenemos que tomar el entorno para darnos cuenta de que tiene de especial este punto y la respuesta es: tan pequeño como nosotros queramos. Este ejemplo está basado en el Ejemplo 5.11 de [11].

Es aquí donde nace el concepto de germen de conjuntos.

Definición 3.2.1. *Sean $(M, \mathcal{A})$ un variedad analítica compleja y $\xi \in M$ un punto de M, decimos que dos subconjuntos $S, T \subset M$ definen el mismo* **germen** *en ξ si existe un entorno U de ξ tal que $S \cap U = T \cap U$.*

Veamos que esta relación es de equivalencia:

1. Reflexiva. Sea $S \subset M$ y $\xi \in M$, trivialmente, tomando cualquier entorno U de ξ, $S \cap U = S \cap U$.

2. Simétrica. Sean $\xi \in M$ y sean $S, T \subset M$ tales que existe un entorno U de ξ verificando que $S \cap U = T \cap U$, entonces $T \cap U = S \cap U$ y T tiene el mismo germen en ξ que S.

3. Transitiva. Sean $\xi \in M$ y $S, T, R \subset M$ tales que existen U y V entornos de ξ de forma que $S \cap U = T \cap U$ y $T \cap V = R \cap V$. Entonces, tomando $W = U \cap V$ entorno de ξ se tiene que $S \cap W = R \cap W$ así que S y R definen el mismo germen en ξ.

Luego efectivamente esta relación nos define una relación de equivalencia dentro del conjunto $\mathcal{P}(M)$ de partes de M que denotaremos por $\sim_\xi$. A las clases de equivalencia las llamamos **gérmenes de conjuntos** en ξ y denotaremos al germen del conjunto A por $\mathbf{A}$. La filosofía que hay detrás de esta construcción es ver la variedad desde el punto de vista local. Sea $\xi \in M$ un punto de la variedad y dos entornos $S, T \subset M$ de ξ, entonces S, T definen el mismo germen y este coincide con el germen de M. Si S, T son entornos de ξ existen U, V abiertos con $\xi \in U \subset S$ y $\xi \in V \subset T$, tomando $U \cap V$ entorno abierto de ξ, se tiene que $S \cap (U \cap V) = U \cap V = T \cap (U \cap V)$. Así que visto desde ξ todos sus entornos son iguales. Por otro lado, sean $A, B \subset M$ dos subconjuntos de M tales que ξ no pertenece a sus clausuras, es decir, $\xi \notin \overline{A}$ y $\xi \notin \overline{B}$. Entonces A y B tienen el mismo germen en ξ y además este coincide con el del vacío. Si $\xi \notin \overline{A}, \overline{B}$, entonces existen U, V entornos abiertos de ξ tal que $A \cap V = \emptyset$ y $B \cap V = \emptyset$. Tomando el entorno abierto $U \cap V$ de ξ, con el que se tiene $A \cap (U \cap V) = \emptyset = B \cap (U \cap V)$. En particular, si $F, K \subset M$ son dos cerrados de M que no contienen a ξ entonces tienen el mismo germen que el vacío. Con esto podemos intuitivamente extrapolar que si ξ no está suficientemente próximo a un conjunto este es prescindible desde su punto de vista.

En el espacio $G_\xi(M) = \mathcal{P}(M)/\sim_\xi$, podemos definir las operaciones internas de unión e intersección de conjuntos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccc} \cup: & G_\xi(M) \times G_\xi(M) & \longrightarrow & G_\xi(M) \\ & (\mathbf{A}, \mathbf{B}) & \longmapsto & \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \end{array}$$

donde $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ hace referencia al germen del conjunto $A \cup B$ y

$$\begin{array}{rccc} \cap: & G_\xi(M) \times G_\xi(M) & \longrightarrow & G_\xi(M) \\ & (\mathbf{A}, \mathbf{B}) & \longmapsto & \mathbf{A} \cap \mathbf{B} \end{array}$$

en donde $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ se refiere al germen del conjunto $A \cap B$.

Además de la relación de contenido que viene dada por:

$$\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \Longleftrightarrow A \subset B$$

Seguidamente daremos una importante definición fruto de preocuparse únicamente de lo que le ocurre a un conjunto cerca de un punto sin importar como se comporta dicho conjunto de manera global.

Definición 3.2.2. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja, $\xi \in M$ un punto de la variedad y Z un subconjunto de M. Decimos que Z es un* **subconjunto analítico** *de M en ξ si existe un entorno abierto U de ξ tal que el conjunto $Z \cap U$ es un conjunto analítico global de U. Es decir, que existe U entorno abierto de ξ y funciones $f_1^{(\xi)}, ..., f_s^{(\xi)} \in \mathcal{H}_\xi(U)$ holomorfas en ξ, tales que*

$$Z \cap U = V_U\left(f_1^{(\xi)}, ..., f_s^{(\xi)}\right)$$

Decimos que Z es un ***subconjunto analítico*** de M si lo es para todos los puntos de M. La definición local de subconjunto analítico es importante. Observemos que de este modo, las subvariedades son subconjuntos analíticos (como veremos en el Ejemplo 3.2.1). Además, hay variedades analíticas complejas para las cuales las únicas funciones holomorfas globales definidas sobre ellas son las constantes (por ejemplo, para las variedades compactas).
Si para un punto ξ de M existen un entorno abierto U de ξ y una función f_ξ holomorfa en U tales que $Z \cap U = V_U(f_\xi)$ decimos que Z es un ***subconjunto analítico principal*** en ξ. En el caso de que esta propiedad se cumpla para todo punto de M entonces decimos que Z es un ***subconjunto analítico principal***. Ahora veamos que todo subconjunto analítico Z de una variedad M es un conjunto cerrado. Lo probaremos viendo que el conjunto $M \setminus Z$ es un abierto de M. Sea $\xi \in M \setminus Z$ entonces existe U abierto en M con $\xi \in U$ tal que $U \cap Z$ es un conjunto analítico global en U, es decir, $U \cap Z = V_U(f_1, ..., f_s)$. Si $U \cap Z = \emptyset$, entonces $U \subset M \setminus Z$ y hemos acabado. En caso contrario, como $\xi \notin U \cap Z$, entonces existe f_i con $f_i(\xi) \neq 0$ y por lo tanto, existe un abierto V con $\xi \in V$ tal que $f_i(z) \neq 0$ para todo $z \in V$. Luego $U \cap V$ es un abierto que contiene a ξ y tal que $V \cap U \subset U \setminus Z \subset M \setminus Z$. Por lo tanto, el conjunto $M \setminus Z$ es abierto como queríamos probar.
Es claro, que si consideramos un subconjunto $Z \subset M$ cerrado, para comprobar que es un subconjunto analítico de M basta con que sea subconjunto analítico para cada punto de Z en consecuencia de que si tomas $\xi \notin Z$, existe U abierto en M con $U \cap Z = \emptyset$ y tenemos que $U \cap Z = V_U(1)$.

Ejemplo 3.2.1. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja de dimensión n, y $N \subset M$ una subvariedad de M de dimensión $k < n$, entonces N es un ejemplo de subconjunto analítico de M. Sea $\xi \in N$ un punto cualquiera de la subvariedad, por definición existe una carta $(U_\xi, \varphi_\xi) \in \mathcal{A}$ tal que $\xi \in U_\xi$ y $\varphi_\xi(U_\xi \cap N) = \Omega \times \{0\}$ abierto de $\mathbb{C}^k \times \{0\}$. Denotaremos $\varphi_\xi = (\varphi_\xi^1, ..., \varphi_\xi^n)$ donde $\varphi_\xi^i : U_\xi \to \mathbb{C}$ para $1 \leq i \leq n$. Por esto,*

$$\begin{aligned} U_\xi \cap N = \varphi_\xi^{-1}(\Omega \times \{0\}) &= \{z \in U_\xi : \varphi_\xi(z) \in \Omega \times \{0\}\} \\ &= \{z \in U_\xi : (\varphi_\xi^1, ..., \varphi_\xi^k)(z) \in \Omega\} \cap \{z \in U_\xi : (\varphi_\xi^{k+1}, ..., \varphi_\xi^n)(z) = 0\} \\ &= \{z \in U_\xi : \varphi_\xi^{k+1}(z) = \cdots = \varphi_\xi^n(z) = 0\} \\ &= V_{U_\xi}(\varphi_\xi^{k+1}, ..., \varphi_\xi^n). \end{aligned}$$

esto se cumple para cada punto de N. Como dijimos debajo del Ejemplo 2.3.1, una subvariedad de codimensión positiva ($dim N < dim M$) es un cerrado de M, luego N es un subconjunto analítico de M.

Proposición 3.2.1. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja conexa y $A \subseteq M$ un subconjunto analítico de M. Si A tiene interior no vacío, entonces $A = M$.*

Demostración. Supongamos $A \subset M$ un subconjunto analítico. Tomamos $\mathring{A} \neq \emptyset$ el interior de A y $\xi \in M$ un punto de acumulación de $\mathring{A}$. Por un lado, $\xi \in A$, ya que A es cerrado, y por otro lado, como A es subconjunto analítico, existen un entorno abierto U de ξ y $f_1, ...f_n$ funciones holomorfas en ξ tales que $U \cap A = V_U(f_1, ..., f_n)$. Como ξ es punto acumulación de $\overset{\circ}{A}$ entonces $U \cap \overset{\circ}{A}$ es abierto y no vacío, tenemos que $U \cap \overset{\circ}{A} \subset U \cap A$, así que $f_1, ..., f_n$ se anulan sobre $U \cap \overset{\circ}{A}$. Por el Teorema de Identidad (Teorema A.2.1), $f_1 = \cdots = f_n = 0$ en todo U, así que $U \subset A$ es un abierto contenido en A, luego $U \subset \overset{\circ}{A}$ y por lo tanto $\xi \in U \subset \overset{\circ}{A}$. En conclusión, todo punto de acumulación de $\overset{\circ}{A}$ pertenece a $\overset{\circ}{A}$ así que $\overset{\circ}{A}$ es cerrado. Como M es conexo el único conjunto que es cerrado y abierto es el total, así que $\overset{\circ}{A} = A = M$.

□

Para continuar vamos a dar un par de definiciones de topología general. Un subconjunto de un espacio topológico decimos que es ***discreto*** si para cada punto existe un entorno del punto que no contiene a ningún otro punto del conjunto. Por otro lado, decimos que un subconjunto es ***localmente finito*** si el cardinal de la intersección del conjunto con cualquier compacto es finito. Veamos que los subconjuntos analíticos de una variedad analítica compleja de dimensión uno son localmente finitos.

Proposición 3.2.2. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una superficie de Riemann y $A \subset M$ un subconjunto analítico propio de M. Entonces A es localmente finito.*

Demostración. Dado $\xi \in A$, existen U entorno abierto de ξ y $f_1, ..., f_n \in \mathcal{H}_\xi(U)$ tales que $A \cap U = V_U(f_1, ..., f_n)$. Como A es propio, entonces por la Proposición 3.2.1, existe i tal que $f_i \neq 0$. Como la dimensión de M es 1, las funciones $f_1, ..., f_n$ heredan las propiedades de la variable compleja, así que en U el conjunto de ceros de f_i es un conjunto sin puntos de acumulación luego existe un entorno abierto de $\xi \in V \subset U$ de forma que $V \setminus \{\xi\}$ es libre de ceros. Esto significa que $V \cap A = \{\xi\}$, así que A es un subconjunto discreto de M. Como además es cerrado, entonces para cualquier K compacto de M tenemos que $A \cap K$ es un conjunto compacto y discreto, así que finito. De esto se deduce que A es localmente finito.

□

Un ejemplo que ilustra muy bien la importancia de los subconjuntos analíticos es el de la función Zeta de Riemann, ya que concentra las necesidades de extender los subconjuntos algebraicos, de tener una definición local de estos conjuntos para funciones que no son holomorfas globalmente y la relación de la geometría analítica con otras disciplinas como la Teoría de Números. Todo comienza con la observación de Leonhard Euler en 1749 de la igualdad

$$\prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1$$

Cien años más tarde a Bernhard Riemann le fascinó la fórmula de Euler y a raíz de ahí se interesó por temas como la distribución de números primos.

Figura 3.2: Bernhard Riemann en 1863. Imagen obtenida de [16].

En su memoria de 1859, Riemann estudia la función ζ definida por la serie de Dirichlet $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ con $s \in \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 1\}$ y dedujo directamente de la fórmula de Euler la relación entre esta función y los números primos con la fórmula:

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad s \in \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 1\}$$

y generalizó la definición de esta función al plano complejo agujereado en 1 gracias al teorema que vamos a enunciar a continuación.

Teorema 3.2.1. *La función $\zeta(s)$ puede extenderse a una función holomorfa en todo punto del plano complejo salvo para el 1, donde tiene un polo de orden 1. Además, para todo punto s de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ se satisface la ecuación funcional:*

$$\zeta(s) = s^2 \pi^{s-1} sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

donde $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ es la función Gamma de Euler.

La función descrita en este teorema se define como ***función Zeta de Riemann***. En vista de la ecuación funcional se ve que la función se anula en todos los enteros pares negativos estos son los denominados ***ceros triviales***. Con toda esta información podemos dar la famosa Hipótesis de Riemann en términos de la geometría analítica. Para ello tomamos como variedad analítica compleja $M = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}$ y la enuciamos de la siguiente manera:

Hipótesis de Riemann:
El subconjunto analítico $V_M(\zeta)$ está contenido en $\left\{z \in \mathbb{C} : Re(z) = \frac{1}{2}\right\}$.

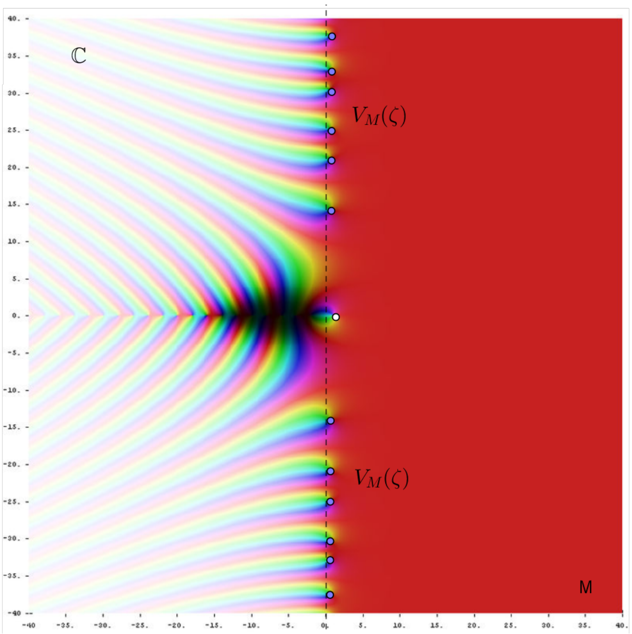

Figura 3.3: La función Zeta de Riemann. Modificada con GeoGebra a partir de [15].

En la Figura 3.3 el color de cada punto s codifica el valor de $\zeta(s)$: Los colores fuertes denotan valores próximos a 0 y la tonalidad codifica el valor del argumento. El punto blanco en $s = 1$ hace referencia al polo. La línea discontinua representa la recta $Re(s) = 0$ y los puntos azules son los puntos del conjunto $V_M(\zeta)$ en la porción de $\mathbb{C}$ que se observa en la figura.

El conjunto $V_M(\zeta)$ se denomina el ***conjunto de ceros no triviales*** de la función zeta de Riemann. Son varios los avances que se han hecho en la dirección de demostrar dicha conjetura. En 1896, Hadamard y de la Vallée-Poussin probaron independientemente que no podía existir ningún cero con parte real igual a 1. Esto mostró, junto con las otras propiedades de $V_M(\zeta)$ demostradas por el propio Riemann, que todos los ceros no triviales deben estar en el interior de la banda crítica $0 < Re(z) < 1$. Este fue un paso fundamental para las primeras demostraciones del famoso Teorema de los Números Primos, el cual demuestra que la función $\pi(x) = \#\{p \in \mathbb{N} : p \text{ primo y } p \leq x\}$ tiene el mismo comportamiento asintótico que $\dfrac{x}{ln(x)}$.
En 1914, Hardy demostró que existe un número infinito de ceros sobre la recta crítica $Re(z) = \frac{1}{2}$. Sin embargo la hipótesis de Riemann sigue siendo un problema abierto que de ser cierto supondría un gran avance para conocer mejor la distribución de los números primos en el conjunto de los naturales. La demostración de la veracidad o falsedad de la conjetura de Riemann es uno de los ocho *Problema del Milenio* propuestos por el instituto Clay en el año 2000 y está recompensado con un millón de dolares americanos. Este ejemplo está basado en las referencias [2] y [5] en donde se puede encontrar más información referente a la función Zeta de Riemann.

Retomando el concepto de germen de conjuntos, dentro de la familia de todos estos subconjuntos, podemos tomar el cociente con la relación de gérmenes de conjuntos de donde se deduce la definición siguiente:

Definición 3.2.3. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja, $\xi \in M$ un punto de la variedad y $\boldsymbol{Z} \in G_\xi(M)$ un germen de conjunto de M en ξ. Se dice que $\boldsymbol{Z}$ es un* **germen de conjunto analítico** *si Z es un subconjuto analítico de M en ξ.*

Como los subconjuntos analíticos heredan todas las propiedades de los conjuntos analíticos globales vistas en la Sección 3.1.1, entonces la familia de gérmenes de conjuntos analíticos en ξ es cerrada para la unión y la intersección de gérmenes de conjuntos. En lo que resta solo trabajaremos con gérmenes de conjuntos analíticos, denotaremos la familia de gérmenes de conjuntos analíticos de M en ξ por $\mathcal{G}_\xi(M)$. Además, para todo germen de este conjunto, podemos encontrar un representante de la forma $V_U(f_1, ..., f_n)$, para algún entorno abierto U y funciones $f_1, ..., f_n \in \mathcal{H}_\xi(U)$. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{G}_\xi(M)$ un germen de conjunto analítico, entonces A es un subconjunto analítico en ξ. Es decir, existe U entorno abierto de ξ y funciones $f_1, ..., f_n$ holomorfas en ξ tales que $A \cap U = V_U(f_1, ..., f_n)$ por lo tanto $V_U(f_1, ..., f_n)$ y A tienen el mismo germen y $V_U(f_1, ..., f_n)$ es un representante de $\mathbf{A}$. De aquí podemos concluir que los gérmenes de conjuntos analíticos son los gérmenes de conjuntos analíticos globales en algún entorno abierto de ξ. Para denotar estos conjuntos utilizaremos la notación $V_\xi(f_1, ..., f_n) = V_U(f_1, ..., f_n)$ para algún U entorno abierto de ξ y $f_1, ..., f_n \in \mathcal{H}_\xi(U)$ funciones holomorfas en ξ.

Y con esta ya tenemos dos nociones distintas de germen. Por un lado tenemos la de germen de funciones holomorfas, y por otro la de germen de conjuntos analíticos. En lo que queda de Capítulo nos dedicaremos a relacionar estos dos conceptos.

3.2.1. Relación entre el anillo de gérmenes de funciones holomorfas y los gérmenes de conjuntos analíticos

Consideremos $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_\xi(M)$ y $\mathbf{A} \in \mathcal{G}_\xi(M)$ diremos que $\mathbf{f}$ se anula en $\mathbf{A}$ si, y solo si, existe $A' \in \mathbf{A}$ con $f|_{A'} = 0$. Como esta relación viene dada sobre clases de equivalencia y para que tenga sentido tenemos que probar que no depende de los representantes escogidos. Sean $\mathbf{f}$ y $\mathbf{A}$ de forma que $\mathbf{f}$ se anula en $\mathbf{A}$. Sea además $g \in \mathbf{f}$. Esto quiere decir que existe U entorno abierto de ξ con $f|_U = g|_U$. Por otro lado existe $A' \in \mathbf{A}$ con $f|_{A'} = 0$. Tomando el conjunto $V = U \cap A'$ que pertenece a $\mathbf{A}$, se tiene que $f|_V = g|_V = 0$, entonces existe un conjunto de $\mathbf{A}$ sobre el que g se anula. Así queda demostrado que no importa el representante escogido.

Haciendo un abuso de la notación diremos que $\mathbf{f}$ se anula en $\mathbf{A}$ si $f|_A = 0$ ya que podemos tomar al conjunto sobre el que se anula f como representante del germen del conjunto A.

Podemos probar el siguiente lema que nos ayudará en el estudio de las propiedades de los gérmenes de conjuntos analíticos.

Lema 3.2.1. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja, $\xi \in M$ un punto de la variedad y $\boldsymbol{A} \in \mathcal{G}_\xi(M)$. El subconjunto de $\mathcal{O}_\xi(M)$ dado por*

$$\mathcal{I}(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{f} \in \mathcal{O}_\xi(M) : \boldsymbol{f} \text{ se anula en } \boldsymbol{A}\}$$

es un ideal, que se denomina **ideal del germen del conjunto analítico $\boldsymbol{A}$**.

Demostración. Lo primero que debemos probar es que $(\mathcal{I}(\mathbf{A}), +)$ es un subgrupo, es decir, para todo $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{I}(\mathbf{A})$, entonces $\mathbf{f} - \mathbf{g} \in \mathcal{I}(\mathbf{A})$. Si $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{I}(\mathbf{A})$ quiere decir que existen $A_1, A_2 \in \mathbf{A}$ tales que, $f(z) = 0$ para todo $z \in A_1$ y $g(z) = 0$ para todo $z \in A_2$. Como existe U entorno de ξ con $A_1 \cap U = A_2 \cap U$, se tiene $(f - g)(z) = f(z) - g(z) = 0$ para todo $z \in A_1 \cap U$. Como $A_1 \cap U \in \mathbf{A}$ concluimos que $\mathbf{f} - \mathbf{g} \in \mathcal{I}(\mathbf{A})$.

Queda probar que para todo $\mathbf{h} \in \mathcal{O}_\xi(M)$ y para todo $\mathbf{f} \in \mathcal{I}(\mathbf{A})$, se tiene que $\mathbf{hf} \in \mathcal{I}(\mathbf{A})$. Si $\mathbf{f} \in \mathcal{I}(\mathbf{A})$, entonces $f(z) = 0$ para todo $z \in A$. Luego, dado cualquier $\mathbf{h} \in \mathcal{O}_\xi(M)$, tenemos $(hf)(z) = h(z)f(z) = 0$ para todo $z \in A \cap U$, donde U es un abierto donde h está definido. En suma, $\mathbf{hf} \in \mathcal{I}(\mathbf{A})$ y $\mathcal{I}(\mathbf{A})$ es un ideal.

□

También podemos partir de un ideal del anillo $\mathcal{O}_\xi(M)$ y ver donde se anulan sus elementos.

Definición 3.2.4. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja, $\xi \in M$ un punto de la variedad y $\mathcal{I} = (\boldsymbol{f}_1, ..., \boldsymbol{f}_n)$ un ideal de $\mathcal{O}_\xi(M)$. Se define $V_\xi(\mathcal{I}) \in \mathcal{G}_\xi(M)$ como el germen en ξ del conjunto $V_\xi(f_1, ..., f_n)$, y se denomina* **germen del conjunto de ceros de $\mathcal{I}$**.

Nos queda ver que la definición no depende de los representantes escogidos para los generadores del ideal $\mathcal{I}$. Para $i \in \{1,...,n\}$ tomamos $g_i \in \mathbf{f}_i$, es decir, existe un entorno abierto U_i de ξ tal que $f_i|_{U_i} = g_i|_{U_i}$. Solo tenemos que ver que $V_\xi(g_1, ..., g_n) \in V_\xi(\mathcal{I})$, o lo que es igual, que $V_\xi(g_1, ..., g_n)$ tiene el mismo germen que $V_\xi(f_1, ..., f_n)$.

Tomando $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$, que es un entorno abierto de ξ, tenemos que

$$V_\xi(f_1, ..., f_n) \cap U = \{z \in U : f_1(z) = \cdots = f_n(z) = 0\},$$

por otro lado

$$V_\xi(g_1, ..., g_n) \cap U = \{z \in U : g_1(z) = \cdots = g_n(z) = 0\}.$$

Como en todos los puntos de U, f_i y g_i coinciden, entonces $V_\xi(g_1, ..., g_n) \cap U = V_\xi(f_1, ..., f_n) \cap U$, teniendo así que $V_\xi(f_1, ..., f_n)$ y $V_\xi(g_1, ..., g_n)$ comparten el mismo germen en ξ.

Nótese que en la definición anterior podemos tomar el ideal $\mathcal{I}$ finitamente generado gracias a que $\mathcal{O}_\xi(M)$ es un anillo noetheriano.

Ahora vamos a ofrecer algunos ejemplos:

Ejemplo 3.2.2. *Sea* $\boldsymbol{\emptyset}$ *el germen del conjunto vacío, entonces* $\mathcal{I}(\boldsymbol{\emptyset}) = \mathcal{O}_\xi(M)$*. Esto se deduce directamente del hecho que* $\boldsymbol{1} \in \mathcal{I}(\boldsymbol{\emptyset})$*. Así que* $\mathcal{I}(\boldsymbol{F}) = \mathcal{O}_\xi(M)$ *donde* F *es cualquier conjunto analítico de* M *que no contiene a* ξ*.*

Ejemplo 3.2.3. *Consideremos el germen* $\boldsymbol{M}$ *en* ξ *del conjunto total* M*, entonces* $\mathcal{I}(\boldsymbol{M}) = (0)$*. Los conjuntos que pertenecen al germen son los entornos de* ξ*, y si* f *se anula en un entorno de* ξ *tiene el mismo germen que el* 0 *y por lo tanto el único germen del ideal es* $\boldsymbol{0}$*.*

Ejemplo 3.2.4. *Sea* $\mathfrak{m}_\xi(M)$ *el ideal maximal de* $\mathcal{O}_\xi(M)$*, entonces* $V_\xi(\mathfrak{m}_\xi(M))$ *es el germen de* $\{\xi\}$*. Ya vimos que* $\mathfrak{m}_\xi(M) = \{\boldsymbol{f} \in \mathcal{O}_\xi(M) : f(\xi) = 0\}$*, de donde se deduce que* $V_\xi(\mathfrak{m}_\xi(M)) = \boldsymbol{\{\xi\}}$*.*

Ejemplo 3.2.5. *Para todo ideal* $\mathcal{I}$ *de* $\mathcal{O}_\xi(M)$*, se tiene* $V_\xi(\mathcal{I}) = V_\xi(\mathcal{I}^m)$*, con* $m \in \mathbb{N}$*.*

Veamos ahora una proposición que nos caracteriza los gérmenes $V_\xi(\mathcal{I})$.

Proposición 3.2.3. *Sean* $(M, \mathcal{A})$ *una variedad analítica compleja,* $\xi \in M$ *un punto de la variedad e* $\mathcal{I}$ *un ideal de* $\mathcal{O}_\xi(M)$*. Entonces* $V_\xi(\mathcal{I})$ *es el mayor de los gérmenes de conjuntos analíticos en* ξ *tales que* $\boldsymbol{f}$ *se anula en él para todo* $\boldsymbol{f} \in \mathcal{I}$*. Es decir,* $\mathbf{A} \subset V_\xi(\mathcal{I})$*, para todo* $\mathbf{A}$ *tal que* $\mathcal{I}$ *se anula en* $\mathbf{A}$*.*

Demostración. Sea $\mathbf{A}$ un germen tal que para todo $\mathbf{f} \in \mathcal{I} = (\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_n)$ se tiene que $\mathbf{f}$ se anula en $\mathbf{A}$. En particular, $\mathbf{f}_i$ se anula en $\mathbf{A}$ para todo i, es decir, existe $A_i \in \mathbf{A}$ tal que $f_i|_{A_i} = 0$ para todo i. Entonces se tiene que $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \subset V_\xi(f_1, ..., f_n)$. En conclusión, $\mathbf{A} \subset V_\xi(\mathcal{I})$.

□

Veamos ahora una serie de propiedades entre los ideales de gérmenes de conjuntos analíticos y los gérmenes del conjunto de ceros de ideales.

Proposición 3.2.4. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja, $\xi \in M$ un punto de la variedad, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{G}_\xi(M)$ e $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ dos ideales de $\mathcal{O}_\xi(M)$, entonces tenemos las siguientes propiedades:*

i) *Si $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$, entonces $\mathcal{I}(\boldsymbol{B}) \subset \mathcal{I}(\boldsymbol{A})$.*

ii) *Si $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$, entonces $V_\xi(\mathcal{J}) \subset V_\xi(\mathcal{I})$.*

iii) *$\boldsymbol{A} = V_\xi(\mathcal{I}(\boldsymbol{A}))$.*

iv) *$\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}(V_\xi(\mathcal{J}))$, pero la igualdad no tiene porqué darse.*

v) *$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ si, y solo si, $\mathcal{I}(\boldsymbol{A}) = \mathcal{I}(\boldsymbol{B})$.*

vi) *$\mathcal{I} = \mathcal{J}$ implica que $V_\xi(\mathcal{I}) = V_\xi(\mathcal{J})$, pero el recíproco no es cierto en general.*

vii) *$\mathcal{I}(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = \mathcal{I}(\boldsymbol{A}) \cap \mathcal{I}(\boldsymbol{B})$.*

viii) *$\mathcal{I}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \supseteq \mathcal{I}(\boldsymbol{A}) + \mathcal{I}(\boldsymbol{B})$, pero la igualdad no tiene porqué darse.*

ix) *$V_\xi(\mathcal{I} + \mathcal{J}) = V_\xi(\mathcal{I}) \cap V_\xi(\mathcal{J})$.*

x) *$V_\xi(\mathcal{I}\mathcal{J}) = V_\xi(\mathcal{I} \cap \mathcal{J}) = V_\xi(\mathcal{I}) \cup V_\xi(\mathcal{J})$.*

Demostración. Vamos a ir probando las afirmaciones, tomaremos $\mathcal{I} = (\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_s)$ y $\mathcal{J} = (\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_r)$.

i) Si $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ quiere decir que $A \subset B$. Sea $\mathbf{h} \in \mathcal{I}(\mathbf{B})$, esto implica que $h|_B = 0$, luego $h|_A = 0$ y por lo tanto $\mathbf{h} \in \mathcal{I}(\mathbf{A})$.

ii) Como $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$, para todo $1 \leq i \leq s$, se tiene que $\mathbf{f}_i = \sum_{j=1}^{r} \mathbf{q}_j \mathbf{g}_j$. Entonces,

$$f_i|_{V_\xi(g_1,...,g_r)} = \sum_{j=1}^{r} q_j g_j|_{V_\xi(g_1,...,g_r)} = 0.$$

Esto quiere decir que todo germen de $\mathcal{I}$ se anula sobre $V_\xi(\mathcal{J})$ y por la Proposición 3.2.3, se tiene que $V_\xi(\mathcal{J}) \subset V_\xi(\mathcal{I})$.

iii) Sea $\mathbf{f} \in \mathcal{I}(\mathbf{A})$, entonces $\mathbf{f}$ se anula en $\mathbf{A}$, de donde se sigue que $\mathbf{A} \subseteq V_\xi(\mathcal{I}(\mathbf{A}))$ por la Proposición 3.2.3. Por otro lado, existe U entorno abierto de ξ y $h_1, ..., h_d$ funciones holomorfas en ξ, tales que $A \cap U = V_\xi(h_1, ..., h_d)$. Tomamos el ideal $\mathcal{F} = (\mathbf{h}_1, ..., \mathbf{h}_d)$, claramente, $\mathbf{h}_i$ se anula sobre $\mathbf{A}$ y por tanto $\mathbf{h}_i \in \mathcal{I}(\mathbf{A})$ con $1 \leq i \leq d$. De donde se sigue $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}(\mathbf{A})$, por *ii)* $V_\xi(\mathcal{I}(\mathbf{A})) \subseteq V_\xi(\mathcal{F}) = \mathbf{A}$.

iv) Sea $\mathbf{f} \in \mathcal{J}$, entonces $\mathbf{f}$ se anula en $V_\xi(\mathcal{J})$ y por lo tanto $\mathbf{f} \in \mathcal{I}(V_\xi(\mathcal{J}))$. Sin embargo, tomando $f = z^2 \in \mathcal{H}_0(\mathbb{C})$, el ideal $\mathcal{I}(V_\xi(\mathbf{f})) = \mathfrak{m}_0(\mathbb{C}) \supsetneq (\mathbf{f})$.

v) La implicación $(\Longrightarrow)$ se deduce directamente de *i)*, y $(\Longleftarrow)$ es consecuencia directa de *iii)*.

vi) La implicación es causa directa de *ii)*, pero el contraejemplo dado en *iv)* nos prueba que el recíproco no es cierto.

VII) Una función $\mathbf{f} \in \mathcal{I}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$ si, y solo si, $\mathbf{f}$ se anula en $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ si, y solo si, $\mathbf{f}$ se anula en $\mathbf{A}$ y también en $\mathbf{B}$ si, y solo si, $\mathbf{f} \in \mathcal{I}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{I}(\mathbf{B})$.

VIII) Sea $\mathbf{f} \in \mathcal{I}(\mathbf{A}) + \mathcal{I}(\mathbf{B})$, entonces $\mathbf{f} = \mathbf{g} + \mathbf{h}$ con $\mathbf{g} \in \mathcal{I}(\mathbf{A})$ y $\mathbf{h} \in \mathcal{I}(\mathbf{B})$. Es decir, $\mathbf{g}$ se anula en $\mathbf{A}$ y $\mathbf{h}$ se anula en $\mathbf{B}$, así es que $\mathbf{f} = \mathbf{g} + \mathbf{h}$ se anula en $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$. Por tanto, $\mathbf{f} \in \mathcal{I}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$. Pero, si tomamos $A = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 - z_2^2 = 0\}$ y $B = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 = 0\}$, entonces $A \cap B = \{0\}$. Tenemos que $\mathcal{I}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \mathfrak{m}$, mientras que $\mathcal{I}(\mathbf{A}) + \mathcal{I}(\mathbf{B}) = (z_1, z_2^2)$ que son ideales distintos.

IX) Sabemos que $\mathcal{I} + \mathcal{J} = (\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_s, \mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_r)$, entonces $V_\xi(\mathcal{I} + \mathcal{J})$ es el germen de

$$V_\xi(f_1, ..., f_s, g_1, ..., g_r) = V_\xi(f_1, ..., f_s) \cap V_\xi(g_1, ..., g_r)$$

que es el germen de $V_\xi(\mathcal{I}) \cap V_\xi(\mathcal{J})$.

X) De igual modo que arriba escribimos como es $\mathcal{I}\mathcal{J} = (\mathbf{f}_i\mathbf{g}_j : 1 \le i \le s, 1 \le j \le r)$. Por lo tanto $V_\xi(\mathcal{I}\mathcal{J})$ es el germen de $V_\xi(f_ig_j : 1 \le i \le s, 1 \le j \le r)$ que precisamente es lo mismo que $V_\xi(f_1, ..., f_s) \cup V_\xi(g_1, ..., g_r)$, como vimos en la Proposición 3.1.1, cuyo germen es $V_\xi(\mathcal{I}) \cup V_\xi(\mathcal{J})$, con esto se tiene $V_\xi(\mathcal{I}\mathcal{J}) = V_\xi(\mathcal{I}) \cup V_\xi(\mathcal{J})$. De otro lado $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} \subset \mathcal{I}$, por *ii*), $V_\xi(\mathcal{I}) \subset V_\xi(\mathcal{I} \cap \mathcal{J})$, de igual forma, $V_\xi(\mathcal{J}) \subset V_\xi(\mathcal{I} \cap \mathcal{J})$, de donde se sigue que $V_\xi(\mathcal{I}) \cup V_\xi(\mathcal{J}) \subseteq V_\xi(\mathcal{I} \cap \mathcal{J})$. Finalmente, $\mathcal{I}\mathcal{J} \subset \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$, por *ii*), $V_\xi(\mathcal{I} \cap \mathcal{J}) \subseteq V_\xi(\mathcal{I}\mathcal{J})$. En conclusión,

$$V_\xi(\mathcal{I}) \cup V_\xi(\mathcal{J}) \subseteq V_\xi(\mathcal{I} \cap \mathcal{J}) \subseteq V_\xi(\mathcal{I}\mathcal{J}) = V_\xi(\mathcal{I}) \cup V_\xi(\mathcal{J})$$

Así que los tres gérmenes son iguales.

□

3.2.2. Irreducibilidad

En esta sección estudiaremos la noción de reducibilidad/irreducibilidad de gérmenes de conjuntos analíticos en un punto. Concepto que ya fue adelantado en el Capítulo 3.

Definición 3.2.5. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja, $\xi \in M$ un punto de la variedad, $\boldsymbol{A} \in \mathcal{G}_\xi(M)$. Se dice que $\boldsymbol{A}$ es* **reducible** *en ξ si existen dos gérmenes de conjuntos analíticos $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V} \in \mathcal{G}_\xi(M)$ distintos del propio $\boldsymbol{A}$ de forma que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U} \cup \boldsymbol{V}$. En caso de no existir dicha descomposición se dice que $\boldsymbol{A}$ es* **irreducible** *en ξ.*

Es importante remarcar que la condición de ser irreducible es una propiedad local, es decir, depende del punto donde se mira. Por ejemplo, si consideramos el subconjunto analítico $Z = V_{\mathbb{C}^2}(z_1z_2)$ en $\mathbb{C}^2$. Si tomamos $\xi_1 = (0, 0)$, el germen de Z en ξ_1 no es irreducible ya que puede escribirse $V_{\xi_1}(z_1) \cup V_{\xi_1}(z_2)$ mientras que en cualquier otro punto, como por ejemplo $\xi_2 = (1, 0)$, el germen de Z en ξ_2 es irreducible porque es igual a $V_{\xi_2}(z_2)$.

Teorema 3.2.2. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja, $\xi \in M$ un punto de la variedad y $\boldsymbol{A} \in \mathcal{G}_\xi(M)$. Entonces $\boldsymbol{A}$ es irreducible en ξ si, y solo si, $\mathcal{I}(\boldsymbol{A})$ es primo.*

Demostración. Vamos a demostrar la doble implicación.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $\mathbf{A}$ es reducible, entonces existen $\mathbf{U}_1$ y $\mathbf{U}_2$ distintos de $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A} = \mathbf{U}_1 \cup \mathbf{U}_2$. Se sigue de aquí que $\mathbf{U}_i \subsetneq \mathbf{A}$ con lo que se tiene $\mathcal{I}(\mathbf{A}) \subsetneq \mathcal{I}(\mathbf{U}_i)$ y de esto deducimos que existe $\mathbf{f}_i \in \mathcal{I}(\mathbf{U}_i)$ y $\mathbf{f}_i \notin \mathcal{I}(\mathbf{A})$. Por otro lado, $\mathcal{I}(\mathbf{A}) = \mathcal{I}(\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{U}_2) = \mathcal{I}(\mathbf{U}_1) \cap \mathcal{I}(\mathbf{U}_2)$. Como $\mathbf{f}_i \in \mathcal{I}(\mathbf{U}_i)$, entonces $\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2 \in \mathcal{I}(\mathbf{U}_1) \cap \mathcal{I}(\mathbf{U}_2) = \mathcal{I}(\mathbf{A})$ por lo que se deduce que $\mathcal{I}(\mathbf{A})$ no es primo, así queda demostrada la implicación por contrarrecíproco.

$\Longrightarrow$) Nuevamente por contrarrecíproco, supongamos ahora que $\mathcal{I}(\mathbf{A})$ no es primo, entonces existen gérmenes $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$ en $\mathcal{O}_\xi(M)$ que no pertenecen a $\mathcal{I}(\mathbf{A})$, pero tal que $\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2$ sí pertenece. Escogemos representantes f_1 y f_2 y definimos $V_j = A \cap V_\xi(f_j)$ con $j = 1, 2$. Obviamente, $\mathbf{V}_j \subsetneq \mathbf{A}$ y, por lo tanto, $\mathbf{V}_j$ es un germen propiamente contenido en $\mathbf{A}$. Ahora vamos a ver que $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{V}_1 \cup \mathbf{V}_2$. Sabemos que $\mathbf{V}_1 \cup \mathbf{V}_2$ es el germen de $V_\xi(f_1) \cup V_\xi(f_2) = V_\xi(f_1 f_2)$. Como el producto de $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$ se anula en $\mathbf{A}$ automáticamente ya tenemos el contenido por la Proposición 3.2.3. Por lo tanto, $\mathbf{A}$ es reducible, concluyendo así la prueba.

□

Teorema 3.2.3. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja, $\xi \in M$ un punto de la variedad. Cualquier germen de conjunto analítico $\boldsymbol{A}$ en ξ puede ser escrito como una unión finita $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}_1 \cup \cdots \cup \boldsymbol{V}_n$, donde $\boldsymbol{V}_j$ son gérmenes de conjuntos analíticos irreducibles con $\boldsymbol{V}_j \nsubseteq \boldsymbol{V}_k$ para $j \neq k$. Los gérmenes $\boldsymbol{V}_j$ están unívocamente determinados salvo permutaciones.*

Demostración. Primero supondremos que $\mathbf{A}$ no puede ponerse como unión finita de gérmenes irreducibles. Por lo tanto $\mathbf{A}$ tiene que ser reducible. Así que $\mathbf{A} = \mathbf{V}_1 \cup \mathbf{V}_2$, con cada uno propiamente contenido en $\mathbf{A}$. Como alguno de ellos tiene que ser reducible podemos descomponerlo de nuevo. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathbf{V}_1$ es el reducible. Por lo tanto $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{11} \cup \mathbf{V}_{12}$. Repitiendo el proceso tenemos

$$\mathbf{A} \supset \mathbf{V}_1 \supset \mathbf{V}_{11} \supset \mathbf{V}_{111} \supset \ldots.$$

Y con ello

$$\mathcal{I}(\mathbf{A}) \subset \mathcal{I}(\mathbf{V}_1) \subset \mathcal{I}(\mathbf{V}_{11}) \subset \mathcal{I}(\mathbf{V}_{111}) \subset \ldots.$$

Lo que es imposible porque $\mathcal{O}_\xi(M)$ es noetheriano, y toda cadena ascendente de ideales se estabiliza. Eliminando las componentes repetidas y las que están contenidas unas en otras tenemos que existe una descomposición de $\mathbf{A}$ como unión finita de gérmenes irreducibles, de forma que cada componente irreducible es distinta del total y que ninguna de ellas esta contenida en otra. Ahora queda probar la unicidad.

Si $\mathbf{A}$ es irreducible supongamos que $\mathbf{A} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i = \bigcup_{j=1}^{m} \mathbf{V}'_j$ son dos descomposiciones distintas en componentes irreducibles, entonces

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_i \cap \mathbf{A} = \mathbf{V}_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} \mathbf{V}'_j \right) = \bigcup_{j=1}^{m} (\mathbf{V}_i \cap \mathbf{V}'_j)$$

Como V_i es irreducible necesariamente $V_i = V_i \cap V'_{f(i)}$ para algún índice $f(i) \in \{1, ..., m\}$, teniendo así que $V_i \subseteq V'_{f(i)}$. De la misma manera $V'_j \subseteq V_{g(j)}$ con $g(j) \in \{1, ..., n\}$. En suma, $V_i \subseteq V'_{f(i)} \subseteq V_{g(f(i))}$, como en las representaciones no se da el contenido entre componentes de la unión, necesariamente $g(f(i)) = i$ y en conclusión $V_i = V'_{f(i)}$. Igualmente $f(g(j)) = j$ y $V'_j = V_{g(j)}$. Así que $n = m$ y las representaciones difieren únicamente en el orden de los componentes.

□

Los gérmenes $\mathbf{V}_i$ de la descomposición dada en el teorema anterior se denominan ***componentes irreducibles*** de $\mathbf{A}$. Ahora veremos un ejemplo de germen irreducible, consideremos $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja cualquiera, y $N \subset M$ una subvariedad de dimensión k. Vimos en el Ejemplo 3.2.1 que N era una subconjunto analítico de M, definido en cada punto $\xi \in N$ por $V_{U_\xi}(\varphi_\xi^{k+1}, ..., \varphi_\xi^n)$ con $(U_\xi, \varphi_\xi) \in \mathcal{A}$. Denotaremos como $\mathcal{J} = (\boldsymbol{\varphi}_\xi^{k+1}, ..., \boldsymbol{\varphi}_\xi^n)$ ideal de $\mathcal{O}_\xi(M)$ y tomamos el germen de conjunto analítico de N en ξ que denotamos por $V_\xi(\mathcal{J})$. Primero probaremos que $\mathcal{J} = \mathcal{I}(V_\xi(\mathcal{J}))$. Sabemos por la Proposición 3.2.4, *iv*) que $\mathcal{J}$ está contenido en $\mathcal{I}(V_\xi(\mathcal{J}))$. Sea $\mathbf{f} \in \mathcal{I}(V_\xi(\mathcal{J}))$, por lo tanto $\mathbf{f}$ se anula en $V_\xi(\mathcal{J})$, y tenemos que $f|_{U_\xi \cap N} = 0$. Como f es holomorfa en ξ entonces $f \circ \varphi_\xi^{-1} = \sum_{j \in \mathbb{N}^n} a_j z^j$ y por lo tanto

$$f = \left(\sum_{j \in \mathbb{N}^n} a_j z^j \right) \circ \varphi_\xi = \sum_{j \in \mathbb{N}^n} a_j (\varphi_\xi^1)^{j_1} \cdots (\varphi_\xi^n)^{j_n}.$$

Si $f|_{U_\xi \cap N} = 0$ entonces todos los monomios de la forma $a_j (\varphi_\xi^1)^{j_1} \cdots (\varphi_\xi^k)^{j_k}$ tienen que ser nulos por lo tanto $a_j = 0$ para todos lo términos de esa forma. Así que $f = \sum_{j \in \mathbb{N}^n} a_j (\varphi_\xi^{k+1})^{j_{k+1}} \cdots (\varphi_\xi^n)^{j_n}$. Tomando gérmenes, $\mathbf{f} = \sum_{j \in \mathbb{N}^n} a_j (\boldsymbol{\varphi}_\xi^{k+1})^{j_{k+1}} \cdots (\boldsymbol{\varphi}_\xi^n)^{j_n}$, con lo que tenemos que $\mathbf{f} \in \mathcal{J}$. Con esto tenemos que $\mathcal{J} = \mathcal{I}(V_\xi(\mathcal{J}))$. Veamos que $\mathcal{J}$ es ideal primo, sean $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{O}_\xi(M)$, con $\mathbf{fg} \in \mathcal{J}$ y $\mathbf{f}, \mathbf{g} \notin \mathcal{J}$. Sabemos que $f = \sum_{j \in \mathbb{N}^n} a_j (\varphi_\xi^1)^{j_1} \cdots (\varphi_\xi^n)^{j_n}$ y $g = \sum_{h \in \mathbb{N}^n} b_h (\varphi_\xi^1)^{h_1} \cdots (\varphi_\xi^n)^{h_n}$. Como no pertenecen a $\mathcal{J}$, entonces tienen que existir al menos dos términos $a_j (\varphi_\xi^1)^{j_1} \cdots (\varphi_\xi^k)^{j_k}$ y $b_h (\varphi_\xi^1)^{h_1} \cdots (\varphi_\xi^k)^{h_k}$ de f y g respectivamente, que no sean idénticamente nulos, por tanto en fg hay un término $a_j b_h (\varphi_\xi^1)^{j_1+h_1} \cdots (\varphi_\xi^k)^{j_k+h_k}$ no nulo, así que $\mathbf{fg}$ no puede pertenecer a $\mathcal{J}$, contradicción con lo supuesto, así que $\mathcal{J}$ es ideal primo. Aplicando el Teorema 3.2.2, el germen de una subvariedad N en cualquiera de sus puntos es irreducible.

Sea $\mathbf{f}$ un germen de $\mathcal{O}_0(\mathbb{C}^n)$ que no es ni una unidad ni es cero. Si $\mathbf{f} = \mathbf{p}_1^{e_1} \cdots \mathbf{p}_r^{e_r}$ es la descomposición de $\mathbf{f}$ en factores irreducibles que sabemos que existe y es única ya que $\mathcal{O}_0(\mathbb{C}^n)$ es dominio de factorización única, entonces

$$V_0(\mathbf{f}) = V_0(\mathbf{p}_1) \cup \ldots \cup V_0(\mathbf{p}_r)$$

es la descomposición en componentes irreducibles de $V_0(\mathbf{f})$.

Primeramente como cada $\mathbf{p}_i$ es irreducible entonces $(\mathbf{p}_i)$ es un ideal primo y por lo tanto $V_0(\mathbf{p}_i)$ es irreducible por el Teorema 3.2.2.

Finalmente como $V_0(\mathbf{p}_i^{e_i}) = V_0(\mathbf{p}_i)$ por el Ejemplo 3.2.5, entonces

$$V_0(\mathbf{f}) = V_0(\mathbf{p}_1) \cup \ldots \cup V_0(\mathbf{p}_r)$$

Además, $V_0(\mathbf{p}_i) \not\subset V_0(\mathbf{p}_j)$ ya que en caso contrario $(\mathbf{p}_i) \supset (\mathbf{p}_j)$ y por lo tanto $\mathbf{p}_i$ divide a $\mathbf{p}_j$ lo que no es posible concluyendo así la prueba. Esto nos demuestra que los únicos subconjuntos analíticos principales irreducibles en cero son de la forma $V_0(\mathbf{f}^r)$ con $\mathbf{f}$ irreducible.

Volviendo al ejemplo con el que comenzamos la Sección 3.2 en el que justificamos el paso de la geometría global a la geometría local de los conjuntos hicimos una presentación intuitiva del concepto de irreducibilidad en un punto. El subconjunto analítico en cuestión era el $V_{\mathbb{C}^2}(z_2^2 - z_1^2(z_1+1))$. Para un entorno suficientemente pequeño del origen, es decir, en la bola abierta donde es absolutamente convergente la función $\sqrt{1+z_1}$ que tiene un radio de convergencia de valor 1, la función $z_2^2 - z_1^2(z_1+1)$ puede escribirse como el producto de $z_2 + z_1\sqrt{1+z_1}$ y $z_2 - z_1\sqrt{1+z_1}$. Luego,

$$V_0(z_2^2-z_1^2(1+z_1)) = V_0((z_2+z_1\sqrt{1+z_1})(z_2-z_1\sqrt{1+z_1})) = V_0(z_2+z_1\sqrt{1+z_1}) \cup V_0(z_2-z_1\sqrt{1+z_1})$$

que es la descomposición en factores irreducibles del subconjunto analítico $V_0(z_2^2 - z_1^2(1+z_1))$.

Capítulo 4

Geometría local de los subconjuntos analíticos

En el presente capítulo trabajaremos con las funciones definidas sobre los subconjuntos analíticos y aparecerá el anillo local de gérmenes de conjuntos analíticos, otra estructura algebraica muy interesante para la geometría analítica local de estos conjuntos. Después estudiaremos la naturaleza de los puntos de los subconjuntos analíticos a través de conceptos como el de regularidad, singularidad o dimensión. Para este capítulo se han seguido fundamentalmente las referencias [3], [4] y [8].

4.1. Funciones holomorfas sobre subconjuntos analíticos

Definición 4.1.1. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja, $A \subset M$ un subconjunto analítico de M, ω un punto de A y $f : A \to \mathbb{C}$ una función. Decimos que f es* **holomorfa en** ω *si existe $U \subset M$ entorno abierto de ω y una función $\tilde{f} : U \to \mathbb{C}$ holomorfa tales que $f|_{A\cap U} = \tilde{f}|_{A\cap U}$.*

Decimos que f es ***holomorfa*** si lo es para todo punto de A.

Es decir, que f será holomorfa en un punto si podemos extenderla a una función holomorfa en un abierto de dicho punto. En vista de la definición, la restricción en A de una función holomorfa sobre M o sobre un abierto que contenga a A, es una función holomorfa, pero no podemos asegurar que toda función holomorfa en A se pueda extender a una única función holomorfa en M. El conjunto

$$\mathcal{H}_\omega(A) = \{f : A \to \mathbb{C} \, : \, f \text{ es holomorfa en } \omega\}$$

es un anillo con la suma y el producto punto a punto. Si dotamos a A de la topología de subespacio, estás funciones son claramente continuas y podemos tomar sobre $\mathcal{H}_\omega(A)$ la noción de germen en ω a través de la relación siguiente:

$$f \sim_\omega g \Longleftrightarrow \text{ existe } W \text{ entorno abierto de } \omega \text{ en } A \text{ tal que } f|_W = g|_W.$$

Podemos ahora definir el conjunto de gérmenes de funciones holomorfas de A en ω como el conjunto $\mathcal{O}_\omega(A) = \mathcal{H}_\omega(A)/\sim_\omega$. Este conjunto es un anillo con la suma y el producto de clases canónico y a la clase de la función f la denotamos por $\mathbf{f}$. Veamos ahora que este anillo solo depende del germen de conjunto analítico de A en ω, es decir, que si A y B tienen el mismo germen en ω, entonces $\mathcal{O}_\omega(A) = \mathcal{O}_\omega(B)$. Sea $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_\omega(A)$, entonces existe U entorno abierto de ω en M y $\tilde{f}$ holomorfa en U tales que $f|_{U\cap A} = \tilde{f}|_{U\cap A}$. Por otro lado existe V entorno abierto de ω en M de forma que $A \cap V = B \cap V$ tomando el entorno abierto $L = U \cap V$ de ω tenemos que $f|_{A\cap L} = \tilde{f}|_{A\cap L} = \tilde{f}|_{B\cap L} = f|_{B\cap L}$, así que f es una función holomorfa de B en ω y por consiguiente $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_\omega(B)$. Análogamente se prueba el contenido contrario. Así que el anillo depende únicamente del germen del conjunto analítico en ω.

Notación: Hasta ahora estábamos utilizando ξ para denotar un punto de la variedad analítica compleja, pero como ahora nos vamos a centrar en los puntos de los subconjuntos analíticos vamos a utilizar ω para denotarlos.

Ya estamos en condiciones de dar la siguiente definición.

Definición 4.1.2. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja, $\omega \in M$ un punto de la variedad, $\boldsymbol{A} \in \mathcal{G}_\omega(M)$ un germen de conjunto analítico en ω distinto de $\boldsymbol{\emptyset}$. Definimos $\mathcal{O}_\omega(\boldsymbol{A}) = \mathcal{O}_\omega(A)$ como el* **anillo local** *de $\boldsymbol{A}$ en ω.*

Por lo visto previamente sabemos que esta definición no depende del representante escogido para $\mathbf{A}$. Tomemos ahora el homomorfismo definido por:

$$\begin{array}{rccc} \Lambda\colon & \mathcal{O}_\omega(M) & \longrightarrow & \mathcal{O}_\omega(\mathbf{A}) \\ & \mathbf{f} & \longmapsto & \mathbf{f}|_A \end{array}$$

Veamos que es sobreyectiva, sea $\mathbf{g} \in \mathcal{O}_\omega(\mathbf{A})$, entonces existe U entorno abierto de ω en M y $\tilde{g}$ una función holomorfa en U tal que $g|_{A\cap U} = \tilde{g}|_{A\cap U}$. Tenemos que $\tilde{\boldsymbol{g}} \in \mathcal{O}_\omega(M)$ y su imagen por Λ es $\Lambda(\tilde{\boldsymbol{g}}) = \tilde{\boldsymbol{g}}|_A$. Como $\tilde{g}|_{A\cap U} = g|_{A\cap U}$ entonces $\tilde{\boldsymbol{g}}|_{\mathbf{A}} = \boldsymbol{g}$.

Calculamos el núcleo del homomorfismo,

$$ker(\Lambda) = \{\mathbf{f} \in \mathcal{O}_\omega(M) : \mathbf{f}|_A = 0\} = \{\mathbf{f} \in \mathcal{O}_\omega(M) : f|_A = 0\} = \mathcal{I}(\mathbf{A}).$$

Por el Primer Teorema de Isomorfía, $\mathcal{O}_\omega(M)/\mathcal{I}(\mathbf{A}) \simeq \mathcal{O}_\omega(\mathbf{A})$. Es decir, el anillo local de $\mathbf{A}$ en ω es el anillo de gérmenes de funciones holomorfas de M en ω módulo el ideal de $\mathbf{A}$.

De este hecho podemos deducir que el anillo local es un anillo conmutativo con unidad y la siguiente proposición:

Proposición 4.1.1. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja, $\omega \in M$ un punto de la variedad, $\boldsymbol{A} \in \mathcal{G}_\omega(M)$ un germen de conjuntos analíticos en ω no vacío. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

I) *El anillo $\mathcal{O}_\omega(\boldsymbol{A})$ es local de maximal $\mathfrak{m}_\omega(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{f} \in \mathcal{O}_\omega(\boldsymbol{A}) \,:\, f(\omega) = 0\}$.*

II) *El anillo $\mathcal{O}_\omega(\boldsymbol{A})$ es noetheriano.*

III) *El anillo $\mathcal{O}_\omega(\boldsymbol{A})$ es dominio de integridad si, y solo si, $\boldsymbol{A}$ es irreducible en ω.*

Demostración. Vamos a probar las propiedades:

I) Por el Corolario 2.4.1 sabemos que el anillo $\mathcal{O}_\omega(M)$ es local de maximal $\mathfrak{m}_\omega(M) = \{\mathbf{f} \in \mathcal{O}_\omega(M) \ : \ f(\omega) = 0\}$, entonces el anillo $\mathcal{O}_\omega(M)/\mathcal{I}(\mathbf{A})$ es local de maximal $\mathfrak{m}_\omega(M)/\mathcal{I}(\mathbf{A}) \simeq \mathfrak{m}_\omega(\mathbf{A}) = \{\mathbf{f} \in \mathcal{O}_\omega(\mathbf{A}) \ : \ f(\omega) = 0\}$.

II) El anillo $\mathcal{O}_\omega(M)/\mathcal{I}(\mathbf{A})$ es noetheriano por ser cociente de un anillo noetheriano como vimos en el Teorema 2.4.3.

III) El anillo $\mathcal{O}_\omega(M)/\mathcal{I}(\mathbf{A})$ es dominio si, y solo si, $\mathcal{I}(\mathbf{A})$ es ideal primo y por el Teorema 3.2.2 será primo si, y solo si, $\mathbf{A}$ es irreducible.

$\square$

Definición 4.1.3. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja, $\omega \in M$ un punto de la variedad, $\boldsymbol{A}$ un germen de conjunto analítico en ω. Para todo $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A}$ germen de conjunto analítico en ω contenido en $\boldsymbol{A}$, se define $\mathcal{I}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{B}) = \{\boldsymbol{f} \in \mathcal{O}_\omega(\boldsymbol{A}) \ : \ f|_B = 0\}$, el* **ideal del germen de conjunto analítico $\boldsymbol{B}$** *en* $\boldsymbol{A}$.

Observese que si $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$, entonces por la Proposición 3.2.4, $\mathcal{I}(\mathbf{A}) \subset \mathcal{I}(\mathbf{B})$, entonces el ideal que acabamos de definir se identifica con el ideal $\mathcal{I}(\mathbf{B})/\mathcal{I}(\mathbf{A})$ de $\mathcal{O}_\omega(M)/\mathcal{I}(\mathbf{A})$. Análogamente podemos definir el conjunto de ceros de un ideal de $\mathcal{O}_\omega(\mathbf{A})$.

Definición 4.1.4. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja, $\omega \in M$ un punto de la variedad, $\boldsymbol{A}$ un germen de conjunto analítico en ω. Para todo ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_\omega(\boldsymbol{A})$, tomamos el ideal $\tilde{\mathcal{I}} = \{\tilde{\boldsymbol{f}} \in \mathcal{O}_\omega(M) \ : \ \tilde{\boldsymbol{f}}|_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{f}$ para algún $\boldsymbol{f} \in \mathcal{I}\}$, se define ${}_{\boldsymbol{A}}V_\omega(\mathcal{I}) = V_\omega(\tilde{\mathcal{I}})$ y se denomina el* **conjunto de ceros del ideal** $\mathcal{I}$.

Observamos que si consideramos la aplicación canónica $\pi : \mathcal{O}_\omega(M) \to \mathcal{O}_\omega(M)/\mathcal{I}(\mathbf{A})$, entonces el conjunto ${}_{\mathbf{A}}V_\omega(\mathcal{I}) = V_\omega(\pi^{-1}(\mathcal{I}))$ y por lo tanto ${}_{\mathbf{A}}V_\omega(\mathcal{I}) \subset \mathbf{A}$. Esta identificación del anillo local con el cociente del anillo en el espacio ambiente es de vital importancia, ya que podemos extrapolar todas las propiedades dadas en la Proposición 3.2.4 a propiedades en el anillo local $\mathcal{O}_\omega(\mathbf{A})$ a través del paso al cociente.

4.2. Aplicaciones holomorfas entre subconjuntos analíticos

Definición 4.2.1. *Sean $(M, \mathcal{A})$ y $(N, \mathcal{A}')$ dos variedades analíticas complejas, A y B dos conjuntos analíticos de M y N respectivamente, un punto $\omega \in A$ y $F : A \to B$ una aplicación. Decimos que F es* **holomorfa en** *ω si existen un entorno abierto U de ω en M y una aplicación $\tilde{F} : U \to N$ holomorfa tales que $\tilde{F}|_{A\cap U} = F|_{A\cap U}$.*

Decimos que F es ***holomorfa*** si lo es para todo punto de A. Si F posee inversa y esta es también holomorfa decimos que F es un ***biholomorfismo***. Consideremos ahora una función $f : B \to \mathbb{C}$ holomorfa en el punto $F(\omega) \in B$. Podemos ver que la función $(f \circ F) : A \to \mathbb{C}$ es holomorfa en ω. Como F es holomorfa en ω, existe U entorno abierto de ω y $\tilde{F} : U \to N$ holomorfa en ω tales que $\tilde{F}|_{A\cap U} = F|_{A\cap U}$. Por otro lado, también existe un entorno abierto V de $F(\omega)$ en N y una función $\tilde{f} : V \to \mathbb{C}$ holomorfa en $F(\omega)$ tales que $\tilde{f}|_{B\cap V} = f|_{B\cap V}$. Por la

Proposición 2.2.2, $\tilde{f} \circ \tilde{F}$ es holomorfa en ω. Tomando U suficientemente pequeño de forma que $F(A \cap U) \subset B \cap V$, tenemos que $\tilde{f} \circ \tilde{F}|_{A\cap U} = f \circ F|_{A\cap U}$, luego $f \circ F$ es una función holomorfa en ω. Si tomamos $\omega \in A$ y $\eta \in B$, y $F : A \to B$ una aplicación que lleva ω en η, y es holomorfa en ω, definimos el siguiente homomorfismo entre anillos locales:

$$\begin{array}{rccc} F^*\colon & \mathcal{O}_\eta(\mathbf{B}) & \longrightarrow & \mathcal{O}_\omega(\mathbf{A}) \\ & \mathbf{f} & \longmapsto & \mathbf{f} \circ F \end{array}$$

que lleva el germen en η de la función f, en el germen en ω de la función $f \circ F$. Al homomorfismo F^* lo denominaremos ***homomorfismo entre anillos locales inducido por*** F. Además, no solo es un homomorfismo de anillos, es un homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras. Veamos que ocurre con la composición de aplicaciones y el operador $*$. Sean A, B y C tres subconjutos analíticos, $\omega \in A$, $\eta \in B$ y $\nu \in C$, y $F : A \to B$ y $G : B \to C$ dos aplicaciones holomorfas en ω y en η respectivamente tales que $F(\omega) = \eta$ y $G(\eta) = \nu$. Entonces

$$(G \circ F)^*(\mathbf{f}) = \mathbf{f} \circ (G \circ F) = \mathbf{f} \circ G \circ F$$

por otro lado

$$(F^* \circ G^*)(\mathbf{f}) = F^*(G^*(\mathbf{f})) = F^*(\mathbf{f} \circ G) = \mathbf{f} \circ G \circ F.$$

Así que las dos composiciones coinciden, dándose así la igualdad $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$. En cuanto a la identidad

$$(Id_A)^*(\mathbf{f}) = \mathbf{f} \circ Id_A = \mathbf{f} = Id_{\mathcal{O}_\omega(\mathbf{A})}(\mathbf{f})$$

luego $(Id_A)^* = Id_{\mathcal{O}_\omega(\mathbf{A})}$. En conclusión el operador $*$ define un funtor contravariante entre la categoría de subconjuntos analíticos y la de $\mathbb{C}$-álgebras. Ahora probaremos el siguiente teorema.

Teorema 4.2.1. *Sean (M, A) y $(N, \mathcal{A}')$ dos variedades analíticas complejas de dimensiones m y n respectivamente, $A \subset M$ y $B \subset N$ dos conjuntos analíticos y dos puntos $\omega \in A$ y $\eta \in B$. Si existe $\phi : \mathcal{O}_\eta(\boldsymbol{B}) \to \mathcal{O}_\omega(\boldsymbol{A})$ un homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras, entonces existe una única función $F : A \to B$ holomorfa en ω tal que $F(\omega) = \eta$ y $F^* = \phi$.*

Demostración. Es claro que al ser ϕ homomorfismo de anillos lleva unidades en unidades. Probemos además que al ser homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras, entonces $\phi(\mathfrak{m}_\eta(\mathbf{B})) \subseteq \mathfrak{m}_\omega(\mathbf{A})$. Supongamos que esto no es cierto, es decir, existe $\mathbf{f} \in \mathfrak{m}_\eta(\mathbf{B})$ tal que $\mathbf{g} = \phi(\mathbf{f}) \notin \mathfrak{m}_\omega(\mathbf{A})$. Como $\mathbf{f}$ no es unidad entonces $f(\eta) = 0$, por otro lado, $g(\omega) \neq 0$. Consideramos ahora el germen $\mathbf{f} - g(\omega)$ de la función $f - g(\omega)$. Obviamente $\mathbf{f} - g(\omega)$ es una unidad de $\mathcal{O}_\eta(\mathbf{B})$, luego $\phi(\mathbf{f} - g(\omega))$ es una unidad en $\mathcal{O}_\omega(\mathbf{A})$, pero $\phi(\mathbf{f} - g(\omega)) = \phi(\mathbf{f}) - g(\omega) = \mathbf{g} - g(\omega)$, que no es unidad en $\mathcal{O}_\omega(\mathbf{A})$. Así que llegamos a un absurdo con lo que queda visto que $\phi(\mathfrak{m}_\eta(\mathbf{B})) \subseteq \mathfrak{m}_\omega(\mathbf{A})$. De esto deducimos además que $\phi(\mathfrak{m}_\eta(\mathbf{B})^r) \subseteq \mathfrak{m}_\omega(\mathbf{A})^r$, para todo entero positivo r.

Tomamos $(V, \psi) \in \mathcal{A}'$ una carta sobre N tal que $\eta \in V$ y $\psi(\eta) = 0$. Consideramos las funciones coordenadas $\psi_1, ..., \psi_n : V \to \mathbb{C}$, donde $\psi_i = \pi_i \circ \psi$, con $\pi_i : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ la proyección canónica sobre la coordenada i-ésima para $1 \leq i \leq n$. De esta manera, $\boldsymbol{\psi}_i|_{\mathbf{B}} \in \mathcal{O}_\eta(\mathbf{B})$, y si tomamos su imagen por ϕ, obtenemos las funciones $\mathbf{f}_i = \phi(\boldsymbol{\psi}_i|_{\mathbf{B}})$ que son holomorfas en ω. Entonces existe U_i entorno abierto de ω en M y funciones $\tilde{f}_i : U_i \to \mathbb{C}$ holomorfas tales que $\tilde{f}_i|_{A\cap U_i} = f_i|_{A\cap U_i}$. Consideraremos el entorno abierto $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ de ω en M donde todas las funciones $\tilde{f}_i$ son holomorfas. Definimos la aplicación:

$$\begin{array}{rccc} \hat{F}\colon & U & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & z & \longmapsto & \left(\tilde{f}_1(z), ..., \tilde{f}_n(z)\right) \end{array}$$

que es holomorfa en ω por serlo cada componente y verifica que $\hat{F}(\omega) = 0$. Y con esto, haciendo U y V más pequeños si es necesario, definimos $\tilde{F} = (\psi^{-1} \circ \hat{F}) : U \to V$ que es holomorfa en ω por ser composición de aplicaciones holomorfas y $\tilde{F}(\omega) = \eta$. Tomando la restricción $F = \tilde{F}|_{A \cap U} : A \cap U \to N$. Es claro que $F(\omega) = \eta$ y podemos considerar $F^* : \mathcal{O}_\eta(N) \to \mathcal{O}_\omega(\mathbf{A})$. Trabajando ahora con ϕ, sea $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_\eta(N)$, sabemos que $\mathbf{f}|_\mathbf{B} \in \mathcal{O}_\eta(\mathbf{B})$, así que podemos definir:

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\phi}: & \mathcal{O}_\eta(N) & \longrightarrow & \mathcal{O}_\omega(\mathbf{A}) \\ & \mathbf{f} & \longmapsto & \phi(\mathbf{f}|_\mathbf{B}) \end{array}$$

Observamos que $F^*(\boldsymbol{\psi}_i) = \boldsymbol{\psi}_i \circ F = \boldsymbol{\psi}_i(f_1, ..., f_n) = \mathbf{f}_i = \phi(\boldsymbol{\psi}_i|_\mathbf{B}) = \tilde{\phi}(\boldsymbol{\psi}_i)$, así que F^* y $\tilde{\phi}$ coinciden en los gérmenes de las funciones coordenadas ψ_i y por consiguiente deben coincidir en cualquier polinomio en las funciones coordenadas.

Ahora tomamos $\mathbf{h} \in \mathcal{O}_\eta(N)$, cuyo germen esta generado por h. Como h es holomorfa en η, entonces $h \circ \psi^{-1} = \sum_{j \in \mathbb{N}^n} a_j z^j$, luego

$$h = \left(\sum_{j \in \mathbb{N}^n} a_j z^j \right) \circ \psi = \left(\sum_{j \in \mathbb{N}^n} a_j z^j \right) (\psi_1, ..., \psi_n) = \sum_{j \in \mathbb{N}^n} a_j \psi_1^{j_1} \cdots \psi_n^{j_n}.$$

Tomando gérmenes, $\mathbf{h} = \sum_{j \in \mathbb{N}^n} a_j \boldsymbol{\psi}_1^{j_1} \cdots \boldsymbol{\psi}_n^{j_n}$, podemos escribirlo también $\mathbf{h} = \sum_{|j|=1}^{\infty} a_j \boldsymbol{\psi}_1^{j_1} \cdots \boldsymbol{\psi}_n^{j_n}$, de donde concluimos que, para todo entero positivo r, se puede descomponer $\mathbf{h} = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2$ donde $\mathbf{h}_1 = \sum_{|j|=1}^{r-1} a_j \boldsymbol{\psi}_1^{j_1} \cdots \boldsymbol{\psi}_n^{j_n} \in \mathbb{C}[\boldsymbol{\psi}_1, ..., \boldsymbol{\psi}_n]$ y $\mathbf{h}_2 = \sum_{|j|=r}^{\infty} a_j \boldsymbol{\psi}_1^{j_1} \cdots \boldsymbol{\psi}_n^{j_n} \in \mathfrak{m}_\eta(\mathbf{B})^r$. Calculando $F^*(\mathbf{h}) - \tilde{\phi}(\mathbf{h}) = F^*(\mathbf{h}_2) - \tilde{\phi}(\mathbf{h}_2) \in \mathfrak{m}_\omega(\mathbf{A})^r$ por lo dicho en la primera parte de la demostración. Como esto se cumple para todo entero positivo r, entonces $F^*(\mathbf{h}) - \tilde{\phi}(\mathbf{h}) \in \bigcap_{r=1}^{\infty} \mathfrak{m}_\omega(\mathbf{A})^r$, pero $\mathcal{O}_\omega(\mathbf{A})$ es un anillo local noetheriano y por el Teorema de la Intersección de Krull (Teorema A.1.2) se tiene que $\bigcap_{r=1}^{\infty} \mathfrak{m}_\omega(\mathbf{A})^r = (0)$. Así que F^* y $\tilde{\phi}$ son iguales como homomorfismos.
Además, por cómo está definida $\tilde{\phi}$, sabemos que $\mathcal{I}(\mathbf{B}) \subseteq ker(\tilde{\phi})$, y por lo tanto también es un ideal contenido en el núcleo de F^*, es decir, para cualquier $\mathbf{f} \in \mathcal{I}(\mathbf{B})$ se tiene $F^*(\mathbf{f}) = \mathbf{f} \circ F = 0$. Así que $\mathbf{f}$ se anula en $F(\mathbf{A} \cap \mathbf{U}) \cap \mathbf{W}$ donde W es el entorno abierto de η donde f está definida. Tomando el entorno U de ω lo suficientemente pequeño, por la Proposición 3.2.3 tiene que ocurrir que $F(A \cap U) \subseteq B$, así que podemos tomar una restricción del recorrido. Esto nos permite definir una función holomorfa $F : A \to B$ en ω (que denotaremos igual). Aquí realizaremos un abuso de la notación, tendremos dos funciones F^*, cuyos dominios son distintos, la primera parte de $\mathcal{O}_\eta(N)$ y esta última lo hace de $\mathcal{O}_\eta(\mathbf{B})$, pero como F es la misma aplicación sabemos que para cualquier germen $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_\eta(\mathbf{B})$ y cualquier extensión suya $\tilde{\mathbf{f}} \in \mathcal{O}_\eta(N)$ se tiene que $F^*(\mathbf{f}) = F^*(\tilde{\mathbf{f}})$, y de esto deducimos que,

$$F^*(\mathbf{f}) = F^*\left(\tilde{\mathbf{f}}\right) = \tilde{\phi}\left(\tilde{\mathbf{f}}\right) = \phi(\mathbf{f})$$

así que $F^* = \phi$.

La aplicación F en sí misma no queda determinada unívocamente porque la función $\tilde{F}$ depende de la elección de las extensiones $\tilde{f}_i$ en un entorno de ω. Pero cualquier elección nos definirá el mismo germen sobre A, así que todas las posibles elecciones coinciden sobre A en un entorno de ω, luego $F = \tilde{F}|_{(A\cap U)}$ no depende de las extensiones escogidas.

□

Consideremos ahora dos variedades analíticas complejas $(M, \mathcal{A})$ y $(N, \mathcal{A}')$, y sobre ellas dos conjuntos analíticos A y B respectivamente. Sean $\omega \in A$ y $\eta \in B$ dos puntos en los conjuntos analíticos y tomamos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ los gérmenes de conjuntos analíticos en ω y η. En estas condiciones diremos que ambos gérmenes son ***equivalentes*** si existen U entorno abierto de ω en M, V entorno abierto de η en N y un biholomorfismo $F : A\cap U \to B\cap V$ que lleva ω en η, es decir, $F(\omega) = \eta$. En este caso decimos que F es un biholomorfismo local en un entorno de ω. Apoyándonos en el teorema precedente vamos a caracterizar los gérmenes equivalentes a través de sus anillos locales.

Corolario 4.2.1. *Sean $(M, \mathcal{A})$ y $(N, \mathcal{A}')$ dos variedades analíticas complejas, $A \subset M$ y $B \subset N$ dos conjuntos analíticos, dos puntos $\omega \in A$ y $\eta \in B$. Entonces las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:*

I) *Los gérmenes de conjuntos analíticos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, en ω y η respectivamente, son equivalentes.*

II) *Los anillos locales $\mathcal{O}_\omega(\boldsymbol{A})$ y $\mathcal{O}_\eta(\boldsymbol{B})$ son isomorfos como $\mathbb{C}$-álgebras.*

Demostración. Vamos a probar las dos implicaciones:

i) $\Longrightarrow$ *ii)*. Sí los dos gérmenes son equivalentes, por definición, existe una función $F : A \to B$ biholomorfa localmente en un entorno de ω tal que $F(\omega) = \eta$. Tomamos $F^* : \mathcal{O}_\eta(\mathbf{B}) \to \mathcal{O}_\omega(\mathbf{A})$ y $(F^{-1})^* : \mathcal{O}_\omega(\mathbf{A}) \to \mathcal{O}_\eta(\mathbf{B})$ dos homomorfismos de $\mathbb{C}$-álgebras. Veamos que uno es el inverso del otro,

$$\left(F^* \circ \left(F^{-1}\right)^*\right)(\mathbf{f}) = F^*(\mathbf{f} \circ F^{-1}) = \mathbf{f} \circ F^{-1} \circ F = \mathbf{f}$$

por otro lado,

$$\left(\left(F^{-1}\right)^* \circ F^*\right)(\mathbf{f}) = \left(F^{-1}\right)^*(\mathbf{f} \circ F) = \mathbf{f} \circ F \circ F^{-1} = \mathbf{f}$$

así que los anillos locales son isomorfos como $\mathbb{C}$-álgebras.

ii) $\Longrightarrow$ *i)*. Si los anillos locales son isomorfos, entonces existe un isomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $\phi : \mathcal{O}_\eta(\mathbf{B}) \to \mathcal{O}_\omega(\mathbf{A})$. Por el Teorema 4.2.1, existe $F : A \to B$ holomorfa en ω tal que $F(\omega) = \eta$, y $F^* = \phi$. Para que los gérmenes sean equivalentes solo falta ver que F es biholomorfismo local en un entorno de ω. Como ϕ es isomorfismo, existe $\phi^{-1} : \mathcal{O}_\omega(\mathbf{A}) \to \mathcal{O}_\eta(\mathbf{B})$ homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras de forma que $\phi \circ \phi^{-1} = Id_{\mathcal{O}_\omega(\mathbf{A})}$ y $\phi^{-1} \circ \phi = Id_{\mathcal{O}_\omega(\mathbf{B})}$, aplicando el Teorema 4.2.1 a ϕ^{-1} tenemos $G : B \to A$ holomorfa tal que $G(\eta) = \omega$ y $G^* = \phi^{-1}$. Como $(G \circ F)^* = F^* \circ G^* = \phi \circ \phi^{-1} = Id_{\mathcal{O}_\eta(\mathbf{A})}$ y también $Id_A : A \to A$ verifica $(Id_A)^* = Id_{\mathcal{O}_\eta(\mathbf{A})}$, entonces $G \circ F = Id_A$ en un entorno de ω, por la unicidad probada en el Teorema 4.2.1. Análogamente se prueba que $F \circ G = Id_B$ en un entorno de η y tenemos que $F : A \to B$ es un biholomorfismo local en un entorno de ω lo que concluye así la prueba.

□

4.3. Puntos regulares y singulares. Dimensión

Definición 4.3.1. *Sean* $(M, \mathcal{A})$ *una variedad analítica compleja,* A *un subconjunto analítico de* M *y un punto* $\omega \in A$*. Decimos que* ω *es un* **punto regular** *de* A *si existe un entorno abierto* U *de* ω *en* M *tal que* $A \cap U$ *es una subvariedad analítica compleja de* M*. En caso contrario diremos que* ω *es un* **punto singular** *de* A*.*

Denotaremos como $\mathfrak{R}(A)$ al conjunto de los puntos regulares del conjunto analítico A. Por otro lado, denotamos por $\mathfrak{S}(A) = A \setminus \mathfrak{R}(A)$ al conjunto de puntos singulares de A. Sea $\omega \in \mathfrak{R}(A)$, definimos ***dimensión*** de A en ω a la dimensión de la subvariedad analítica compleja que define A entorno a ω y la denotamos por $dim_\omega A$.

Es claro por como está difinido el conjunto $\mathfrak{R}(A)$ que es abierto en A. Sea ω un punto regular, entonces existe un entorno abierto $U \subset M$ de ω de forma que $W = A \cap U$ es una subvariedad analítica compleja. El conjunto W es abierto en A, veamos que $W \subset \mathfrak{R}(A)$. Sea ahora $\eta \in W$, tenemos que $\eta \in U$ así que también es un entorno abierto de η, y sabemos que $A \cap U$ es subavariedad analítica compleja de M así que η es punto regular de A. Por consiguiente para cada punto regular ω podemos encontrar un abierto W de A de forma que $\omega \in W \subset \mathfrak{R}(A)$, por lo que $\mathfrak{R}(A)$ es abierto en A. Además vimos que el germen de conjunto analítico de una subvariedad analítica compleja en cada uno de sus puntos era irreducible, de esto y de la definición de punto regular se sigue que para cualquier subconjunto analítico, el germen del conjunto en un punto regular es irreducible.

Lema 4.3.1. *Sean* $(M, \mathcal{A})$ *una superficie de Riemann y* A *un subconjunto analítico de* M*, entonces todos los puntos de* A *son regulares, es decir,* $A = \mathfrak{R}(A)$*.*

Demostración. Sea $\omega \in A$, por la Proposición 3.2.2, sabemos que el conjunto A es discreto, por lo tanto existe un entorno U de ω tal que $U \cap A = \{\omega\}$, que es una subvariedad de M de dimensión 0. Así que ω es un punto regular.

□

En vista de esto queda de manifiesto que todo subconjunto analítico en una superficie de Riemann es una subvariedad analítica compleja. En lo siguiente veremos que si tenemos un subconjunto analítico en una variedad de dimensión $n > 1$, el conjunto de puntos para los cuales es una subvariedad es un conjunto denso. Esto se puede ver con el siguiente importante teorema.

Teorema 4.3.1. *Sean* $(M, \mathcal{A})$ *una variedad analítica compleja y* A *un subconjunto analítico de* M*, entonces* $\mathfrak{R}(A)$ *es denso en* A*.*

Demostración. Sea n la dimensión de M vamos a probarlo por inducción sobre n. Si $n = 1$, acabamos de ver en el Lema 4.3.1, que $A = \mathfrak{R}(A)$, así que trivialmente es denso en A. Supongámoslo cierto para $n = 1$, y probémoslo para n. Sea $\omega \in A$, y un entorno abierto U de ω en M arbitrariamente pequeño. Entonces existirán $f_1, ..., f_n$ funciones holomorfas en ω tales que $A \cap U = V_\omega(f_1, ..., f_n)$. Basta con probar que $\mathfrak{R}(A) \cap U$ es no vacío. Si todas las funciones $f_1, ..., f_n$ son idénticamente nulas en U entonces sabemos que $U \subset A$ y entonces $\omega \in \mathfrak{R}(A)$. Supongamos que existe $f_1 \neq 0$, la función f_1 se anula en $U \cap A$, entonces por el Teorema de Unicidad (Teorema A.2.2), existe un multi-índice $i = (i_1, ..., i_n) \in \mathbb{N}^n$ tal que $f = \frac{\partial^{|i|} f_1}{\partial z^i}$ es idénticamente cero en $U \cap A$, pero cierta derivada $\frac{\partial f}{\partial z_j}(\eta) \neq 0$ para algún $\eta \in A \cap U$. Por el Teorema de la Función Implícita, existe un entorno abierto W de η contenido en U tal que el conjunto $A' = V_W(f)$ es una subvariedad analítica compleja de M de dimensión $n-1$. Como $f = 0$ en $A \cap W$, entonces $A \cap W \subset A'$, así que $A \cap W$ es un subconjunto analítico de una variedad analítica compleja de dimensión $n-1$. Por hipótesis de inducción, dados $\delta \in A'$ y W' un entorno abierto de δ en A' se tiene que $W' \cap \mathfrak{R}(A \cap W) \neq \emptyset$, es decir, existe $\xi \in W' \cap \mathfrak{R}(A \cap W)$. Por lo tanto, existe W'' entorno abierto de ξ en M tal que $W'' \cap A \cap W$ es una subvariedad de A' y por lo tanto de M. Luego, ξ es un punto regular de A y como $W'' \cap A \cap W \subset A \cap U$ concluimos que $U \cap \mathfrak{R}(A) \neq \emptyset$ como queríamos probar.

□

Gracias a esto podemos generalizar el concepto de dimensión a cualquier punto de un subconjunto analítico,

Definición 4.3.2. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja, A un subconjunto analítico de M y $\omega \in A$ un punto de A. Se define la* **dimensión** *de A en ω,*

$$dim_\omega(A) = \limsup_{\substack{\eta \to \omega \\ \eta \ regular}} dim_\eta(A)$$

Si el punto es regular vemos que la definición es equivalente a la dada para puntos regulares. Podemos así definir la ***dimensión*** de A de la siguiente manera,

$$dim(A) = \max_{\omega \in A} dim_\omega(A)$$

De esta forma tomando el germen de conjunto analítico $\mathbf{A}$ sobre un punto ω de A, podemos definir $dim(\mathbf{A}) = dim_\omega(A)$. Nótese que si el germen $\mathbf{A}$ en un punto es reducible entonces dicho punto tiene que ser singular y $\mathbf{A}$ tendrá una descomposición en gérmenes irreducibles de la forma $\bigcup_{i=1}^{r} \mathbf{V}_i$, en este caso, atendiendo a la Definición 4.3.2,

$$dim(\mathbf{A}) = \max_{1 \leq i \leq r} dim(\mathbf{V}_i)$$

Notemos que si consideramos Z un subconjunto analítico principal en un punto ω, entonces $dim_\omega(Z) = n - 1$ donde n es la dimensión de la variedad ambiente.

Ejemplo 4.3.1 (Paraguas de Whitney). *Llamamos* **Paraguas de Whitney** *al subconjunto analítico definido por la función $z_1^2 - z_3 z_2^2$, debe su nombre al matemático estadounidense del siglo XX Hassler Whitney. Este es uno de los ejemplos más claros de subconjunto analítico cuya dimensión no coincide en todos sus puntos. Es obvio que en los puntos de la "gabardina" tiene dimensión 2, mientras que en los puntos del "mango" tiene dimensión 1. Parece natural pensar que es reducible ya que puede ser descrito como la unión del conjunto de puntos de dimensión 2 y el conjunto de puntos de dimensión 1, pero lo cierto es que el primero no es un subconjunto analítico. Así que, además, es un ejemplo de subconjunto analítico irreducible en todos sus puntos.*

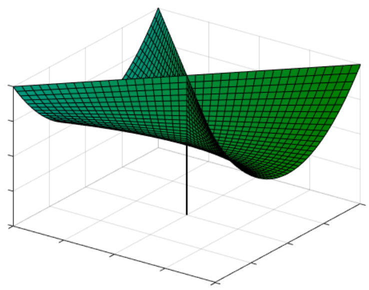

Figura 4.1: Representación del Paraguas de Whitney realizada con MatLab

Introduciremos ahora una noción de dimensión en anillos propia del álgebra como es la dimensión de Krull.

Definición 4.3.3. *Sea R un anillo arbitrario, se denomina* **cadena de primos** *en R a cualquier familia de ideales primos $\{\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_r\}$ de forma que*

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r$$

al valor r se le denomina **longitud** *de la cadena.*
Definimos la **dimensión de Krull** *como la longitud máxima de una cadena de primos en R, si las cadenas no están acotadas, diremos que $dim_k(R) = +\infty$.*

Podemos dar el siguiente resultado

Teorema 4.3.2. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja, ω un punto de M y $\boldsymbol{A}$ un germen de conjunto analítico en ω. Entonces, la dimensión de $\boldsymbol{A}$ coincide con la dimensión de Krull del anillo local $\mathcal{O}_\omega(\boldsymbol{A})$, es decir,*

$$dim(\boldsymbol{A}) = dim_k(\mathcal{O}_\omega(\boldsymbol{A}))$$

Por razones de espacio no podemos ofrecer la demostración completa pero podemos dar un esbozo de los pasos que habría que seguir en la demostración. Todos ellos pueden encontrarse tanto en [8] como en [12].

1. Si $\mathbf{A}$ es un germen de conjunto analítico irreducible en ω de dimensión k y $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_\omega(M)$ tal que $\mathbf{f} \notin \mathcal{I}(\mathbf{A})$ y $f(\omega) = 0$, entonces cada componente irreducible del conjunto $\mathbf{A} \cap V_\omega(\mathbf{f})$ tiene dimensión $k - 1$.

2. Dados dos gérmenes de conjuntos analíticos irreducibles $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ en ω tales que $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ y $dim(\mathbf{A}) + 1 < dim(\mathbf{B})$, entonces existe un germen de conjunto analítico irreducible $\mathbf{C}$ tal que
$$\mathbf{A} \subsetneq \mathbf{C} \subsetneq \mathbf{B}.$$

3. Dado un germen de conjunto analítico irreducible $\mathbf{A}$ en ω de dimensión k, se tiene que

   i) existe una cadena de gérmenes de conjuntos analíticos irreducibles $\{\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k\}$ en ω de forma que
   $$\{\boldsymbol{\omega}\} = \mathbf{A}_0 \subsetneq \mathbf{A}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbf{A}_k = \mathbf{A}.$$

ii) toda cadena maximal de gérmenes de conjuntos irreducibles que comienza en $\{\boldsymbol{\omega}\}$ y termina en $\mathbf{A}$ tiene longitud k.

4. Como $\{\boldsymbol{\omega}\} = \mathbf{A}_0 \subsetneq \mathbf{A}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbf{A}_k = \mathbf{A}$ es una cadena maximal de gérmenes de conjuntos analíticos irreducibles en ω con longitud k, entonces

$$\mathcal{I}(\mathbf{A}) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{I}(\mathbf{A}_1) \subsetneq \mathcal{I}(\{\boldsymbol{\omega}\}) = \mathfrak{m}_\omega(M)$$

es una cadena de ideales primos.

5. Cocientando la cadena anterior por $\mathcal{I}(\mathbf{A})$ obtenemos

$$\mathcal{I}(\mathbf{A})/\mathcal{I}(\mathbf{A}) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{I}(\mathbf{A}_1)/\mathcal{I}(\mathbf{A}) \subsetneq \mathfrak{m}_\omega(M)/\mathcal{I}(\mathbf{A})$$

y por la observación hecha debajo de la Definición 4.1.3, tenemos

$$(0) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{I}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}_1) \subsetneq \mathfrak{m}_\omega(\mathbf{A})$$

que es una cadena maximal de ideales primos en $\mathcal{O}_\omega(\mathbf{A})$. Luego $dim_k(\mathcal{O}_\omega(\mathbf{A})) = k$ y concluimos que

$$dim(\mathbf{A}) = dim_k(\mathcal{O}_\omega(\mathbf{A})).$$

Proposición 4.3.1. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja de dimensión n, A un subconjunto analítico de M y $\omega \in A$ un punto. Se tiene que ω es un punto regular si, y solo si, el anillo local $\mathcal{O}_\omega(\boldsymbol{A})$ es isomorfo a $\mathcal{O}_0(\mathbb{C}^k)$ para algún entero k.*

Demostración. Si ω es un punto regular de A, entonces existe un entorno abierto U de ω en M tal que $A \cap U$ es una subvariedad de M. Es decir, existe una carta, cuyo dominio de carta podemos suponer que es el propio U, $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ de forma que $\varphi(\omega) = 0$ y $\varphi(A \cap U)$ es un abierto de $\mathbb{C}^k$ para algún entero k. Además, como $(U \cap A, \varphi|_{A \cap U})$ es una carta de $A \cap U$ como variedad, tenemos que $\varphi|_{A \cap U}$ es un biholomorfismo entre $A \cap U$ y un entorno abierto W del cero en $\mathbb{C}^k$ que manda ω al 0; así que el germen $\mathbf{A}$ de A en ω y el germen $\mathbf{W}$ de W en 0 son equivalentes. Como W es un entorno abierto de $\mathbf{W} = \mathbb{C}^k$, por el Corolario 4.2.1 sabemos que los anillos $\mathcal{O}_\omega(\mathbf{A})$ y $\mathcal{O}_0(\mathbf{W}) = \mathcal{O}_0(\mathbb{C}^k)/\mathcal{I}(\mathbb{C}^k) = \mathcal{O}_0(\mathbb{C}^k)$ son isomorfos.

Por otro lado, si los anillos son isomorfos, por el Corolario 4.2.1, los germenes $\mathbf{A}$ en ω y $\mathbf{W}$ en 0 con W entorno abierto de 0 en $\mathbb{C}^k$ son equivalentes. Entonces, existe un biholomorfismo $F : A \to W$ tal que $F(\omega) = 0$. Estamos tomando $\mathbb{C}^k$ como subconjunto analítico de $\mathbb{C}^n$, así que como F es holomorfa existe $\tilde{F} : U \to \mathbb{C}^n$ holomorfa con $\tilde{F}|_{A \cap U} = F|_{A \cap U}$. Como F es biholormofa entonces existe $G : W \to A$ holomorfa, así que existe $\tilde{G} : V \to M$ holomorfa con $\tilde{G}|_{W \cap V} = G|_{W \cap V}$. Sabemos que $F \circ G = id$ y viceversa, así que en un entorno lo suficientemente pequeño U' $\tilde{F} \circ \tilde{G} = id$ así que (U', F) es una carta de M tal que $F(\omega) = 0$ y $F(U' \cap A)$ es un abierto de $\mathbb{C}^k$ así que es una subvariedad de M y por lo tanto ω un punto regular de A.

□

Teorema 4.3.3. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja, $\omega \in M$ un punto de la variedad y $\boldsymbol{A}$ un germen de conjunto analítico en ω. Supongamos que $dim(\boldsymbol{A}) = k$, entonces el ideal maximal $\mathfrak{m}_\omega(\boldsymbol{A})$ del anillo local $\mathcal{O}_\omega(\boldsymbol{A})$ no puede tener menos de k generadores. Además, tendrá k generadores si, y solo si, ω es un punto regular de A.*

Demostración. Tomamos la identificación del anillo local con el cociente $\mathcal{O}_\omega(M)/\mathcal{I}(\mathbf{A})$, en la que sabemos que $\mathfrak{m}_\omega(\mathbf{A}) = \mathfrak{m}_\omega(M)/\mathcal{I}(\mathbf{A})$, y a su vez la identificación de $\mathcal{O}_\omega(M)$ con $\mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$ en el que $\mathfrak{m}_\omega(M) = (z_1, ..., z_n)$. Entonces sabemos que $\mathfrak{m}_\omega(\mathbf{A}) = ([z_1], ..., [z_n])$ donde $[z_i]$ es la clase de z_i módulo $\mathcal{I}(\mathbf{A})$. Sean $\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_r \in \mathcal{O}_\omega(M)$ tales que $([\mathbf{f}_1], ..., [\mathbf{f}_r]) = \mathfrak{m}_\omega(\mathbf{A})$ con $r \leq n$. Luego $[z_i] = \sum_{j=1}^{r}[a_{ij}][\mathbf{f}_j]$, así que $z_i - \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\mathbf{f}_j \in \mathcal{I}(\mathbf{A})$ por lo tanto tenemos $z_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\mathbf{f}_j + \mathbf{g}_i$ con $g_i|_A = 0$. Derivando la expresión con respecto de z_h y evaluando en $\omega = 0$ tenemos

$$\delta_i^h = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(0)\frac{\partial f_j}{\partial z_h}(0) + \sum_{j=1}^{r} \cancel{f_j(0)}\frac{\partial a_{ij}}{\partial z_h}(0) + \frac{\partial g_i}{\partial z_h}(0) = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(0)\frac{\partial f_j}{\partial z_h}(0) + \frac{\partial g_i}{\partial z_h}(0) \qquad (*)$$

donde δ_i^h denota la δ de Kronecker. Definimos $b_{jh} = \dfrac{\partial f_j}{\partial z_h}$ y $c_{ih} = \dfrac{\partial g_i}{\partial z_h}$ y consideramos las matrices

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{jh}) \quad \text{y} \quad C = (c_{ih})$$

matrices $r \times n$, $r \times n$ y $n \times n$ respectivamente. Entonces podemos escribir $(*)$ como

$$I = A(0)B(0) + C(0)$$

con I la matriz identidad $n \times n$. Como $B(0)$ tiene rango menor o igual que r, entonces $A^t(0)B(0)$ tiene rango menor o igual que r. Se sigue de aquí que $C(0)$ tiene rango mayor o igual que $n-r$. Supongamos que

$$det\left(\frac{\partial g_i}{\partial z_h}(0)\right)_{\substack{1\leq i\leq n-r\\ 1\leq h\leq n-r}} \neq 0.$$

Por continuidad,

$$det\left(\frac{\partial g_i}{\partial z_h}(z)\right)_{\substack{1\leq i\leq n-r\\ 1\leq h\leq n-r}} \neq 0$$

en un entorno W suficientemente pequeño de ω. Por el Teorema A.2.3, $B = V_W(g_1, ..., g_{n-r})$ es una variedad analítica de dimensión r. Como $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, tenemos que $k \leq r$, lo que prueba la primera afirmación.

Sea ω un punto regular, entonces sabemos que $\mathcal{O}_\omega(\mathbf{A})$ es isomorfo a $\mathcal{O}_0(\mathbb{C}^k)$, y por lo tanto $\mathfrak{m}_\omega(\mathbf{A})$ tendrá k generadores. Recíprocamente, supongamos que el ideal $\mathfrak{m}_\omega(\mathbf{A})$ de $\mathcal{O}_\omega(\mathbf{A})$ tiene k generadores. Sea $\mathbf{A}_1$ una componente irreducible de $\mathbf{A}$ de dimensión k y sea $\mathbf{B}$ el germen definido anteriormente donde ahora $r = k$. Entonces, $\mathbf{A}_1 \subset \mathbf{B}$ y $dim(\mathbf{A}_1) = dim(\mathbf{B})$, luego $\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}$ de donde se sigue que $\mathbf{A}_1 \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{B} = \mathbf{A}_1$. Así que $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ y en consecuencia ω es un punto regular de A.

□

Definimos ahora otra noción de dimensión en anillos,

Definición 4.3.4. *Sea R un anillo noetheriano local de ideal maximal $\mathfrak{m}$ se define como* **dimensión de inmersión** *a la dimensión de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ como $R/\mathfrak{m}$-espacio vectorial. Es decir,*

$$edim(R) = dim_{R/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$$

Decimos que R es un **anillo local regular** *si su dimensión de inmersión coincide con su dimensión de Krull.*

Sabemos por el Lema de Nakayama (Lema A.1.2), que la dimensión de inmersión de un anillo noetheariano local es el menor número de generadores del ideal maximal. Así que podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 4.3.4. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja, $\omega \in M$ un punto de la variedad y $\boldsymbol{A}$ un germen de conjunto analítico en ω. Entonces $dim(\boldsymbol{A}) \leq edim(\mathcal{O}_\omega(\boldsymbol{A}))$. Además, $dim(\boldsymbol{A}) = edim(\mathcal{O}_\omega(\boldsymbol{A}))$ si, y solo si, ω es un punto regular de A.*

Demostración. Sea $dim(\mathbf{A}) = k$, entonces por el Teorema 4.3.3 el ideal maximal $\mathfrak{m}_\omega(\mathbf{A})$ de $\mathcal{O}_\omega(\mathbf{A})$ no puede tener menos de k generadores es decir $dim(\mathbf{A}) = k \leq edim(\mathcal{O}_\omega(\mathbf{A}))$. De este teorema sabemos además que ω es regular en $\mathbf{A}$ si, y solo si, dicho maximal tiene k generadores, o lo que es lo mismo, si, y solo si, $dim(\mathbf{A}) = k = edim(\mathcal{O}_\omega(M))$.

□

Y de este teorema podemos deducir el siguiente corolario

Corolario 4.3.1. *En las condiciones del teorema anterior tenemos que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

I) *ω es un punto regular de A.*

II) *$\mathcal{O}_\omega(\boldsymbol{A})$ es un anillo local regular.*

Demostración. Por el teorema precedente, ω es un punto regular si, y solo si, $dim(\mathbf{A}) = edim(\mathcal{O}_\omega(\mathbf{A}))$ y por el Teorema 4.3.2, tenemos que

$$dim(\mathbf{A}) = dim_k(\mathcal{O}_\omega(\mathbf{A})) = edim(\mathcal{O}_\omega(\mathbf{A})),$$

es decir, $\mathcal{O}_\omega(\mathbf{A})$ es local regular.

□

El siguiente resultado nos permite calcular la dimensión de inmersión de un germen de conjunto analítico en un punto a partir de la funciones que lo definen. Una prueba de este resultado se puede encontrar en [4].

Teorema 4.3.5. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja de dimensión n, $\omega \in M$ un punto de la variedad y $\boldsymbol{A}$ un germen de conjunto analítico en ω definido por las funciones $f_1^{(\omega)}, ..., f_s^{(\omega)}$. Denotamos por $rank_\omega\left(f_1^{(\omega)}, ..., f_s^{(\omega)}\right)$ al rango de la matriz Jacobiana*

$$\left(\frac{\partial f_i^{(\omega)}}{\partial z_j}(\omega)\right)_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Entonces

$$edim(\mathcal{O}_\omega(\boldsymbol{A})) + rank_\omega\left(f_1^{(\omega)}, ..., f_s^{(\omega)}\right) = n$$

Para finalizar, vamos a hacer un estudio de los puntos en los subconjuntos analíticos que en cada punto están definidos por una única función holomorfa. A estos conjuntos ya los definimos en el Capítulo 3 como subconjuntos analíticos principales. Y para ello daremos un teorema que nos caracteriza los puntos regulares de estos subconjuntos.

Teorema 4.3.6. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja de dimensión n, $\omega \in M$ un punto de la variedad y A un subconjunto analítico principal en ω definido por la función f_ω. Definimos por $\nabla f_\omega = \left(\frac{\partial f_\omega}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial f_\omega}{\partial z_n}\right)$ el vector gradiente de f_ω. Entonces ω será un punto regular de A si, y solo si, $\nabla f_\omega(\omega) \neq 0$.*

Demostración. Sabemos que $dim_\omega(A) = dim(\mathbf{A}) = n-1$ y por otro lado el Teorema 4.3.5 nos dice que $edim(\mathcal{O}_\omega(\mathbf{A})) = n - rank_\omega(f_\omega)$. Por el Teorema 4.3.4, ω será regular en A si, y solo si, $dim(\mathbf{A}) = edim(\mathcal{O}_\omega(\mathbf{A}))$. Luego ω será regular en A si, y solo si, $n - 1 = n - rank_\omega(f_\omega)$ si, y solo si, $rank_\omega(f_\omega) = 1$ si, y solo si, $\nabla f_\omega(\omega) \neq 0$.

□

Gracias a esta caracterización de la naturaleza de los puntos para subconjuntos analíticos principales podemos mostrar algunos tipos de singularidades en el origen de curvas en $\mathbb{C}^2$. Todos ellos inspirados en [4].

1. El primer caso que vamos a tratar es el del conjunto $V_{\mathbb{C}^2}(z_2^2 - z_1^2(z_1+1))$ con el que ya hemos trabajado anteriormente (ver Figura 3.1). Calculamos el gradiente en el origen de la función $f(z_1, z_2) = z_2^2 - z_1^3 - z_1^2$

$$\nabla f(0) = (-3z_1^2 - 2z_1, 2z_2)(0) = (0,0)$$

luego el origen es un punto singular de $V_{\mathbb{C}^2}(z_2^2 - z_1^2(z_1+1))$. Por otro lado, al final de la Sección 3.2.2 vimos que el germen de $V_{\mathbb{C}^2}(z_2^2 - z_1^2(z_1+1))$ era reducible en el 0 y su descomposición en irreducibles era $V_0(z_2 - z_1\sqrt{1+z_1}) \cup V_0(z_2 + z_1\sqrt{1+z_1})$. Si calculamos el gradiente de las funciones $g(z_1, z_2) = z_2 - z_1\sqrt{1+z_1}$ y $h(z_1, z_2) = z_2 + z_1\sqrt{1+z_1}$ en el 0 tenemos

$$\nabla g(0) = \left(-\sqrt{1+z_1} - \frac{z_1}{2\sqrt{1+z_1}}, 1\right)(0) = (-1, 1) \neq (0,0)$$

$$\nabla h(0) = \left(\sqrt{1+z_1} + \frac{z_1}{2\sqrt{1+z_1}}, 1\right)(0) = (1, 1) \neq (0,0)$$

Así que el origen es punto regular en ambos conjuntos lo que ratifica el hecho de que son irreducibles. Este caso que tratamos aquí es un ejemplo de punto singular en donde el germen del conjunto es reducible.

2. La curva $V_{\mathbb{C}^2}(z_1^2 + z_2^2)$, que ya nos ha aparecido debajo de la Proposición 3.1.3 donde vimos que el germen en el origen era reducible con descomposición $V_0(z_1 + iz_2) \cup V_0(z_1 - iz_2)$. Calculamos el gradiente de la función $f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$

$$\nabla f(0) = (2z_1, 2z_2)(0) = (0,0)$$

Así que el origen es un punto singular de $V_{\mathbb{C}^2}(z_1^2 + z_2^2)$ y si calculamos el gradiente de las funciones $g(z_1, z_2) = z_1 + iz_2$ y $h(z_1, z_2) = z_1 - iz_2$ se tiene

$$\nabla g(0) = (1, i)(0) = (1, i) \neq (0,0)$$

$$\nabla h(0) = (1, -i)(0) = (1, -i) \neq (0,0)$$

de donde deducimos, como era de esperar, que para los conjuntos $V_0(z_1 + iz_2)$ y $V_0(z_1 - iz_2)$ el origen es un punto regular.

3. La curva $V_{\mathbb{C}^2}(-z_1^3 + z_2^2)$ es el ejemplo clásico de singularidad en el origen la cual recibe el nombre de ***cúspide***. Si calculamos el gradiente de la función $f(z_1, z_2) = -z_1^3 + z_2^2$
$$\nabla f(0) = (-3z_1^2, 2z_2)(0) = (0, 0)$$
Nos dice que efectivamente el conjunto tiene una singularidad en el origen.

4. Por otro lado multiplicando por z_1 a la función f del ejemplo anterior queda definida la curva $V_{\mathbb{C}^2}(-z_1^4 + z_1 z_2^2)$. Calculamos el gradiente en el 0 de la función $g(z_1, z_2) = -z_1^4 + z_1 z_2^2$
$$\nabla g(0) = (-4z_1^3 + z_2^2, 2z_1 z_2)(0) = (0, 0)$$
y tenemos otro ejemplo de singularidad en el origen.

5. Podemos generalizar el concepto de cúspide a la singularidad en el origen de cualquier curva de la forma $V_{\mathbb{C}^2}(z_1^p + z_2^q)$ donde p y q son enteros primos entre sí. Si calculamos el gradiente de $f(z_1, z_2) = z_1^p + z_2^q$,
$$\nabla f(0) = (pz_1^{p-1}, qz_2^{q-1})(0) = (0, 0)$$
observamos, como dijimos, que el origen es punto singular de dicha curva para cualesquiera valores p y q primos entre sí. En la Figura 4.4 se representa en $\mathbb{R}^2$ dicha curva para los valores $(p, q) = (3, 4)$.

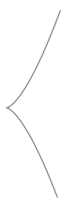

Figura 4.2: Representación en $\mathbb{R}^2$ de la singularidad del ejemplo 3 realizada con GeoGebra

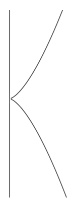

Figura 4.3: Representación en $\mathbb{R}^2$ de la singularidad del ejemplo 4 realizada con GeoGebra

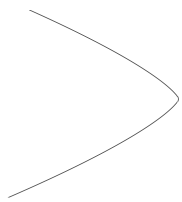

Figura 4.4: Representación en $\mathbb{R}^2$ de la singularidad del ejemplo 5 realizada con GeoGebra

Considerando ahora el espacio ambiente $\mathbb{C}^n$ y un subconjunto analítico principal Z de $\mathbb{C}^n$ podemos definir el siguiente concepto que es parte fundamental para el estudio de la geometría local de cualquier conjunto.

Definición 4.3.5. *Sean Z un subconjunto analítico principal de $\mathbb{C}^n$, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$ un punto de Z y f_ω la función que define Z en ω. Se define como* **espacio tangente de Zariski** *$T_{Z,\omega}$ de Z en ω al espacio afín de $\mathbb{C}^n$ definido por*
$$T_{Z,\omega} = \omega + \left\{ \xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{C}^n : \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_\omega}{\partial z_j}(\omega)\xi_j = 0 \right\}.$$

Atendiendo a esta definición y a la caracterización hecha en el Teorema 4.3.6 tenemos que el espacio tangente de Zariski solo está bien definido en los puntos regulares de Z. Así pues la noción de regularidad o singularidad de puntos se corresponde con la existencia de espacio tangente al subconjunto analítico en ese punto como sucede de alguna manera con todas las definiciones de regularidad/singularidad vistas a lo largo del grado poniendo de manifiesto la estrecha relación que existe entre los conceptos de los diferentes campos de la Matemática.

Bibliografía

[1] Michael F Atiyah y Ian G Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1969.

[2] Catalina Calderón. "La función zeta de Riemann". En: *Rev. Real Academia de Ciencias de Zaragoza* 57 (2002), págs. 67-87.

[3] Evgenii Mikhailovich Chirka. *Complex analytic sets*. Vol. 46. Springer Science & Business Media, 2012.

[4] Theo De Jong y Gerhard Pfister. *Local analytic geometry: Basic theory and applications*. Springer Science & Business Media, 2013.

[5] Roman J Dwilewicz y Ján Minác. "Values of the Riemann zeta function at integers". En: *Materials matemàtics* (2009), págs. 0001-26.

[6] Fernando Etayo Gordejuela. "Variedades diferenciables". En: *Notas del curso* (2019-2020).

[7] Robert Clifford Gunning. *Introduction to holomorphic functions of several variables*. Vol. I. CRC Press, 1990.

[8] Robert Clifford Gunning. *Introduction to holomorphic functions of several variables*. Vol. II. CRC Press, 1990.

[9] Francisco Gabriel Hernandez Zamora. *La geometría compleja, una singular forma de medición*. 2019. URL: `https://www.uv.mx/cienciauv/files/2019/08/25-CYL-GEOMETRI%CC%81A-00.pdf`.

[10] Stanislaw Lojasiewicz. *Introduction to complex analytic geometry*. Birkhäuser, 1991.

[11] David B Massey y Lê Dũng Tráng. *Notes on real and complex analytic and semianalytic singularities. Singularities in geometry and topology*. World Sci.Publ., Hackensack, NJ, 2007, págs. 81-126.

[12] Marcos Sebastiani. *Introdução à geometria analıtica complexa*. IMPA, 2004.

[13] Joseph L Taylor. *Several complex variables with connections to algebraic geometry and Lie groups*. Vol. 46. American Mathematical Soc., 2002.

[14] Wikipedia. *Análisis complejo — Wikipedia, La enciclopedia libre*. [Internet; descargado 21-junio-2020]. 2019. URL: `https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=An%C3%A1lisis_complejo&oldid=120646315`.

[15] Wikipedia. *File:Complex zeta.jpg — Wikimedia Commons, the free media repository*. [Online; accessed 23-June-2020]. 2019. URL: `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Complex_zeta.jpg&oldid=379505546`.

[16] Wikipedia. *File:Georg Friedrich Bernhard Riemann.jpeg — Wikimedia Commons, the free media repository.* [Online; accessed 23-June-2020]. 2019. URL: https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Georg_Friedrich_Bernhard_Riemann.jpeg&oldid=370958542.

[17] Wikipedia. *File:Stereographic projection in 3D.png — Wikimedia Commons, the free media repository.* [Online; accessed 23-June-2020]. 2019. URL: https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Stereographic_projection_in_3D.png&oldid=342095086.

[18] Wikipedia. *Historia de la geometría — Wikipedia, La enciclopedia libre.* [Internet; descargado 21-junio-2020]. 2020. URL: https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Historia_de_la_geometr%C3%ADa&oldid=126323547.

Apéndice A

Definiciones y resultados de álgebra y de varias variables complejas

En este apéndice recogeremos todos los resultados tanto del álgebra como de una o varias variables complejas de los que hacemos uso a lo largo de todo el trabajo.

A.1. Álgebra

Todos los resultados y definiciones de este apéndice pueden consultarse en [1].

Lema A.1.1 (**Lema de Gauss**). *Sea D un dominio de factorización única, entonces $D[X]$ también es un dominio de factorización única.*

Definición A.1.1. *Sea R un anillo conmutativo con unidad. Decimos que R es* **noetheriano** *si se cumple alguna de las siguientes propiedades:*

I) *(Condición de cadena ascendente CCA) Toda cadena ascendente de ideales en R*

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$$

se estabiliza, es decir, existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, se cumple que $I_n = I_{n_0}$.

II) *Toda familia no vacía de ideales de R posee elemento maximal.*

III) *Todo ideal de R es finitamente generado, es decir, dado I ideal de R existen $a_1, ..., a_n \in I$ tales que $I = (a_1, ..., a_n)$.*

Teorema A.1.1 (**Teorema de la Base de Hilbert**). *Sea R un anillo noetheriano, entonces $R[X]$ es también noetheriano.*

Definición A.1.2. *Sea R un anillo no nulo. Llamamos* **radical de Jacobson** *al ideal definido como la intersección de todos los ideales maximales de R.*

$$Jac(R) = \bigcap_{\substack{m \subset R \\ m\, maximal}} m$$

Observación A.1.1. *Nótese que si R es un anillo local de maximal $\mathfrak{m}$, entonces $Jac(R) = \mathfrak{m}$.*

Lema A.1.2 (Lema de Nakayama). *Sean R un anillo, M un R-módulo finitamente generado e $I \subseteq Jac(R)$ un ideal de R. Entonces si $M = IM$, se tiene que $M = (0)$.*

Teorema A.1.2 (Teorema de la Intersección de Krull). *Sean R un anillo noetheriano e $I \subseteq Jac(R)$. Entonces, se tiene*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = (0)$$

A.2. Varias variables complejas

Todos los resultados y definiciones de este apéndice pueden consultarse en [7] y [8].

Para empezar consideramos el monoide $(\mathbb{N}^n, +)$ y, sobre él, difiniremos la aplicación grado de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rccc} |\cdot|: & \mathbb{N}^n & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & \mu & \longmapsto & \mu_1 + \cdots + \mu_n \end{array}$$

donde $\mu = (\mu_1, ..., \mu_2)$. Esto nos será de mucha utilidad cuando introduzcamos la notación de multi-índices que utilizaremos.

Definición A.2.1. *Sean una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ y un punto $z_0 = (z_0^1, ..., z_0^n) \in \Omega$. Decimos que f es* **holomorfa** *en z_0 si existe un entorno abierto $U \subset \Omega$ de z_0 tal que f tiene un desarrollo en serie de potencias de la forma:*

$$f(z) = \sum_{(k_1,...,k_n)\in\mathbb{N}^n} a_{(k_1,...,k_n)}(z_1 - z_0^1)^{k_1} \cdots (z_n - z_0^n)^{k_n}$$

Decimos que f es ***holomorfa*** en Ω si lo es para cada uno de sus puntos. Para facilitar la notación podemos suponer $z_0 = 0$ a través de una transformación lineal, y considerar $k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{N}^n$ para escribir el desarrollo en serie de potencias de la siguiente manera,

$$f(z) = \sum_{k\in\mathbb{N}^n} a_k z^k = \sum_{(k_1,...,k_n)\in\mathbb{N}^n} a_{(k_1,...,k_n)} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$$

Además, si es más conveniente, podemos escirbir el sumatorio en función del grado de los términos que lo componen,

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k\in\mathbb{N}^n} a_k z^k$$

donde $|k|$ denota la función grado previamente definida. A lo largo del trabajo utilizaremos estas expresiones equivalentes según conveniencia.

Teorema A.2.1 (Teorema de Identidad). *Si f y g son dos funciones holomorfas en un abierto conexo Ω de $\mathbb{C}^n$, y $f(z) = g(z)$ en todos los puntos de un abierto no vacío $U \subset \Omega$, entonces $f(z) = g(z)$ para todos los puntos de Ω.*

El siguiente teorema puede consultarse en [3].

Teorema A.2.2 (**Teorema de Unicidad**). *Sea f una función holomorfa en $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$, supongamos que en algún punto z_0 de Ω todas las derivadas parciales $\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}$ se anulan para todo $k \in \mathbb{N}^n$. Entonces f es idénticamente cero en Ω.*

Teorema A.2.3. *Sea $F : \Omega \to \mathbb{C}^m$ una función holomorfa tal que su matriz Jacobiana J_F es de rango constante k en Ω, entonces para cada $z \in \Omega$ existe un entorno de $U \subset \Omega$ de z tal que F es biholomorficamente equivalente a la proyección $(z_1, ..., z_n) \to (z_1, ..., z_k, 0, ..., 0)$ en un entorno abierto del origen de $\mathbb{C}^n$. Luego, el conjunto $\{z \in \Omega : F(z) = 0\}$ es una subvariedad analítica compleja de dimensión $n - k$ en U.*

Definición A.2.2. *Sean $f : \Omega \subseteq \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ y $w = (w_1, ..., w_n) \in \Omega$. Decimos que f es* **regular respecto de** *z_n en w, si $f(w_1, ..., w_{n-1}, z_n)$ no es idénticamente cero como función de z_n en un entorno de w_n*

Lema A.2.1. *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en el origen, entonces mediante un cambio lineal de coordenadas en $\mathbb{C}^n$, podemos hacerla regular respecto de z_n. Así que toda función holomorfa en un punto puede suponerse regular en z_n.*

Definición A.2.3. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad analítica compleja y $\xi \in M$ un punto de la variedad, se define un* **polinomio de Weierstrass** *en ξ de grado $r > 0$ en z_n como un germen $\boldsymbol{f} \in {}_{n-1}\mathcal{O}_\xi(M)[z_n]$ de la forma*

$$\boldsymbol{f} = z_n^r + \boldsymbol{a}_{n-1} z_n^{r-1} + \cdots + \boldsymbol{a}_1 z_n + \boldsymbol{a}_0$$

donde los coeficientes $\boldsymbol{a}_i \in {}_{n-1}\mathcal{O}_\xi(M)$ son no unidades.

Teorema A.2.4. *Sea $\boldsymbol{f} \in {}_n\mathcal{O}_\xi(M)$ un polinomio de Weierstrass en z_n. Entonces $\boldsymbol{f}$ es irreducible en ${}_n\mathcal{O}_\xi(M)$ si, y solo si, $\boldsymbol{f}$ es irreducible en el anillo ${}_{n-1}\mathcal{O}_\xi(M)[z_n] \subset {}_n\mathcal{O}_\xi(M)$.*

Teorema A.2.5 (**Teorema de Preparación de Weierstrass**). *Si $\boldsymbol{f} \in {}_n\mathcal{O}_\xi(M)$ es regular en z_n, entonces existe un único polinomio de Weierstrass $\boldsymbol{g} \in {}_{n-1}\mathcal{O}_\xi(M)[z_n]$ de grado $r > 0$ en z_n tal que $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{ug}$ para alguna unidad $\boldsymbol{u} \in {}_n\mathcal{O}_\xi(M)$.*

Observación A.2.1. *Nótese que un polinomio de Weierstrass $\boldsymbol{f}$ es regular en z_n, luego por la unicidad del teorema de preparación de Weierstrass existe un único polinomio de Weierstrass $\boldsymbol{g} \in {}_{n-1}\mathcal{O}_\xi(M)[z_n]$ tal que $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{ug}$, para alguna unidad $\boldsymbol{u}$. Como $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{1f}$, entonces si $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{ug}$ se tiene que cumplir que $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$.*

Teorema A.2.6 (**Teorema de División de Weierstrass**). *Si $\boldsymbol{g} \in {}_{n-1}\mathcal{O}_\xi(M)[z_n]$ es un polinomio de Weierstrass de grado $r > 0$, entonces cualquier $\boldsymbol{f} \in {}_n\mathcal{O}_\xi(M)$ puede ser escrito de manera única de la forma $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{hg} + \boldsymbol{r}$ donde $\boldsymbol{h} \in {}_n\mathcal{O}_\xi(M)$ y $\boldsymbol{r} \in {}_{n-1}\mathcal{O}_\xi(M)[z_n]$ es un polinomio en z_n de grado menor que r. Además, si $\boldsymbol{f} \in {}_{n-1}\mathcal{O}_\xi(M)[z_n]$, entonces $\boldsymbol{h} \in {}_{n-1}\mathcal{O}_\xi(M)[z_n]$ también.*